

צח כשלג

בשכונת הגפן נפתחה מכבסה חדשה בשם: 'צח כשלג'.

בעל המכבסה חישב ומצא כי הוצאותיו הקבועות ליום הן 100 ש"ח, וההוצאות עבור כל קילוגרם של כביסה הן 1.5 ש"ח.
עם פתיחת המכבסה החדשה, וכדי למשוך לקוחות, קבע בעל המכבסה מחירים זולים מאוד. הוא קבע כי עבור כל קילוגרם כביסה ישלם הלקוח 4 ש"ח.

- שאלה 1. כמה קילוגרמים של כביסה, לפחות, צריך בעל המכבסה לקבל מדי יום כדי שלא יפסיד?
- שאלה 2. א. מה יהיה הרווח היומי של בעל המכבסה, אם יביאו לו 60 ק"ג כביסה ביום?
ב. כמה ק"ג של כביסה צריך בעל המכבסה לקבל ביום, כדי להרוויח 100 ש"ח?
- שאלה 3. בעל המכבסה חישב בכל יום את היחס בין ההוצאות שלו להכנסות שלו.
מה היה יחס זה ביום שקיבל בו 50 ק"ג כביסה?
- שאלה 4. רשמו תבנית מתאימה, ושרטטו גרף המתאר את היחס בין ההוצאות של בעל המכבסה לבין ההכנסות שלו, כך שיחס זה יהיה תלוי בכמות הכביסה.
- שאלה 5. מה קורה ליחס בין ההוצאות של בעל המכבסה לבין הכנסות שלו ככל שמתקבלת יותר כביסה במכבסה? הסבירו את בחירתכם.
א. היחס גדל ב. היחס קטן ג. היחס אינו משתנה ד. אי אפשר לדעת.
- שאלה 6. מהו אחוז הרווח מן ההכנסות, ביום שבו מביאים 100 ק"ג כביסה?
- שאלה 7. ביום מסוים הגיע הרווח מן ההכנסות לכדי 50%. כמה ק"ג של כביסה הובאו באותו יום?

פתרונות למשימה: 'צח כשלג'

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים: מילולי, מספרי, אלגברי וגרפי;
- שינוי נושא נוסחה;
- קריאת גרפים;
- השתנות;
- אחוזים – רווח;
- אי שוויון לינארי.

מבוא:

במשימה זו מעורבות שלוש פונקציות, ויש לדעת להבחין ביניהן. בכל שלוש הפונקציות נגדיר את המשתנה x להיות כמות הכביסה בק"ג. כל שלוש הפונקציות מקבלות ערך כספי בש"ח.

פונקצית ההכנסות (הפדיון): $p(x) = 4x$

פונקצית ההוצאות: $h(x) = 100 + 1.5x$

פונקצית הרווח: $r(x) = 4x - (100 + 1.5x)$

ולאחר פישוט $r(x) = 2.5x - 100$

שאלה 1. כמה קילוגרמים של כביסה, לפחות, צריך בעל המכבסה לקבל מדי יום כדי שלא יפסיד?

אם יביאו למכבסה מדי יום 40 ק"ג כביסה או יותר, בעל המכבסה לא יפסיד. כדי שבעל המכבסה לא יפסיד, הרווח שלו צריך להיות גדול או שווה ל-0: $r(x) \geq 0$. כמות הכביסה הקטנה ביותר הנדרשת כדי לא להפסיד היא כאשר $r(x) = 0$.

נפתור את המשוואה: $4x - (100 + 1.5x) = 0$

ונקבל: $x = 40$

דרך נוספת להגיע למצב מינימלי של חוסר הפסד הוא השוואת ההכנסות (הפדיון) להוצאות: $p(x) = h(x)$.

גם בדרך זו נקבל כי $x = 40$.

שאלה 2. א. מה יהיה הרווח היומי של בעל המכבסה, אם יביאו לו 60 ק"ג כביסה ביום?

אם יביאו 60 ק"ג כביסה ביום, הרווח היומי של בעל המכבסה יהיה 50 ש"ח.

$r(60) = 2.5 \cdot 60 - 100 = 50$

ב. כמה ק"ג של כביסה צריך בעל המכבסה לקבל ביום, כדי להרוויח 100 ש"ח?

אם יביאו 80 ק"ג כביסה ביום ירוויח בעל המכבסה 100 ש"ח ביום.

השאלה היא: מהו x כאשר $r(x) = 100$?

בניסוח אחר: מהו x כאשר $2.5x - 100 = 100$?

פותרים את המשוואה, ומקבלים: $x = 80$.

שאלה 3. בעל המכבסה חישב בכל יום את היחס בין הוצאות שלו להכנסות שלו.

מה היה יחס זה ביום שקיבל בו 50 ק"ג כביסה?

היחס בין הוצאות להכנסות היה שבע שמיניות.

ההוצאות היו 175 ש"ח: $h(50) = 100 + 1.5 \cdot 50 = 175$

ההכנסות היו 200 ש"ח: $p(50) = 4 \cdot 50 = 200$

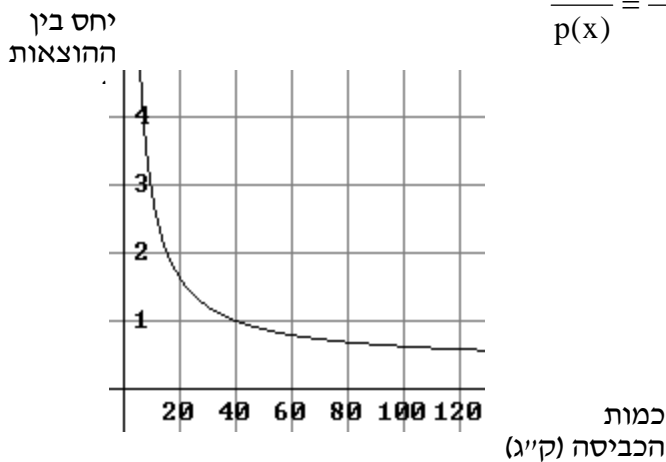
היחס בין הוצאות להכנסות היה: $\frac{h(x)}{p(x)} = \frac{175}{200} = \frac{7}{8}$.

שאלה 4. רשמו תבנית מתאימה, ושרטטו גרף המתאר את היחס בין הוצאות של בעל

המכבסה להכנסות שלו, כך שיחס זה יהיה תלוי בכמות הכביסה.

התבנית: $\frac{h(x)}{p(x)} = \frac{100 + 1.5x}{4x}$

הגרף:



תלמידים אחדים עשויים לשאול: כשיחס בין כמויות מתואר בשבר, איך יודעים מה מסמל המונה ומה – המכנה? הכלל הקובע הוא שהכמות המוזכרת ראשונה (והבאה אחרי המילה בין) מופיעה במונה, והכמות השנייה (הבאה אחרי המילה לבין או אחרי האות ל-) מופיעה במכנה.

בשל היותו של הגרף לא סטנדרטי מבחינת התלמידים, רצוי להמליץ בפניהם על מספר נקודות לחישוב ולהצבה. הנקודות המומלצות הן: 10, 20, 40, 50 (חושב בשאלה 3), 100, 400. יש לוודא שהתלמידים אינם מעבירים קו ישר בין הנקודות, אלא עוברים עליהן ביד חופשית.

תלמידים אחדים עשויים לצייר (בטעות) גרף הבנוי כך שציר אחד הוא ההכנסות והשני הוא ההוצאות. במצב זה, לא די להעמיד את התלמידים על טעותם, ולהסביר מהו הגרף שנדרש מהם. כדאי להוסיף ולבדוק שהקו הישר אותו הם שרטטו אכן מתאים:

- אם שרטטו את הציר האפקי כהכנסות (p), ואת הציר האנכי כהוצאות (h), הישר

$$h(p) = 100 + \frac{3}{8}p$$

- אם שרטטו את הציר האפקי כהוצאות (h), ואת הציר האנכי כהכנסות (p), הישר

$$p(h) = \frac{8}{3}h - 266\frac{2}{3}$$

שאלה 5. מה קורה ליחס בין ההוצאות של בעל המכבסה לבין הכנסות שלו ככל שמתקבלת יותר כביסה במכבסה? הסבירו את בחירתכם.

א. היחס גדל ב. היחס קטן ג. היחס אינו משתנה ד. אי אפשר לדעת.

התשובה הנכונה היא ב': היחס קטן.

ככל שכמות הכביסה גדלה, גם ההוצאות גדלות וגם ההכנסות גדלות אבל קצב גידול ההוצאות (1.5 ש"ח לכל ק"ג כביסה) יותר קטן מקצב גידול ההכנסות (4 ש"ח לכל ק"ג כביסה). מתוך התבנית והגרף ניתן ללמוד שהיחס בין ההוצאות לבין ההכנסות הולך וקטן ככל שכמות הכביסה גדולה יותר. כעיקרון, אם בעל המכבסה מעוניין לצמצם ככל האפשר את היחס, כדאי לו להגדיל את כמות הכביסה היומית בה הוא מטפל. לעומת זאת, כאשר מדובר בכמויות כביסה גדולות, תוספת של כביסה כמעט ואיננה משפיעה על היחס. כל תוספת אמנם מקטינה את היחס, אך במידה קטנה בלבד.

אם מתבוננים בתבנית עצמה, ניתן לראות שהיחס יהיה גדול תמיד מ- $\frac{1.5}{4} = 0.375$.

לכן, גם הגרף לא יורד מתחת לערך זה, למרות שהוא יורד באופן מונוטוני בכל נקודה.

שאלה 6. מהו אחוז הרווח מן ההכנסות, ביום שבו מביאים 100 ק"ג כביסה?

37.5%

ביום שמביאים 100 ק"ג כביסה, ההוצאות הן 250 ש"ח וההכנסות 400 ש"ח. לכן הרווח הוא 150 ש"ח.
נסמן ב- p את אחוז הרווח מן ההכנסות.

$$\frac{p}{100} = \frac{150}{400}$$

$$p = 37.5$$

שאלה 7. ביום מסוים הגיע הרווח מן ההכנסות לכדי 50%. כמה ק"ג של כביסה הובאו באותו יום?

באותו יום הובאו 200 ק"ג כביסה.

כאשר x מייצג את כמות הכביסה (בק"ג), $p(x)$ את ההכנסות

(פדיון) ו- $r(x)$ את הרווח.

$$2.5x - 100 = 0.5 \cdot 4x$$

$$. x = 200$$