



# עבודת קיץ להגשה במתמטיקה לבוגרי כיתה ט לקראת שנה"ל תשפ"ג

**שימו לב:**

**לכל נושא מופיע הסבר ודוגמאות בתחילת הפרק, שיעזור לכם לחזור**

**לחומר ולבצע את התרגילים בצורה הטובה ביותר**

## חזקות ושורשים

- המספר  $a$  בחזקה  $n$  יירשם בצורת  $a^n$ , ומשמעותו:  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$  פעמים  $n$ .

✓  $a$  נקרא "בסיס החזקה", והוא מספר כלשהו.

✓  $n$  נקרא "מעריך החזקה", והוא מספר טבעי (חיובי ושלם).

דוגמאות:  $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$ ,  $(-9)^4 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$

- כאשר בסיס החזקה  $a^n$  הוא מספר חיובי,  $a > 0$ , ערך החזקה הוא חיובי.

דוגמאות:  $5^2 = 25$ ,  $4^3 = 64$

- כאשר בסיס החזקה  $a^n$  הוא מספר שלילי,  $a < 0$ , ערך החזקה תלוי במעריך:

✓ כאשר המעריך  $n$  הוא מספר זוגי, החזקה  $a^n$  חיובית.

✓ כאשר המעריך  $n$  הוא מספר אי-זוגי, החזקה  $a^n$  שלילית.

דוגמאות:

ערך הביטוי  $(-10)^6$  הוא חיובי, כי המעריך הוא 6, כלומר מספר זוגי.

ערך הביטוי  $(-10)^7$  הוא שלילי, כי המעריך הוא 7, כלומר מספר אי-זוגי.

- כאשר מעריך החזקה  $a^n$  הוא 1, כלומר  $n = 1$ , ערך החזקה הוא  $a$

(כל מספר בחזקת 1 שווה למספר עצמו):  $a^1 = a$

דוגמאות:  $8^1 = 8$ ,  $(-6)^1 = -6$ ,  $\left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{3}{4}$

- כאשר בסיס החזקה  $a^n$  הוא אפס,  $a = 0$ , ערך החזקה הוא אפס:  $0^n = 0$

דוגמאות:  $0^4 = 0$ ,  $0^6 = 0$ ,  $0^{13} = 0$

- פעולה בסוגריים קודמת לפעולות אחרות. בהיעדר סוגריים פעולת החזקה קודמת לפעולות הכפל והחילוק, ואלה קודמות לפעולות החיבור והחסור.

דוגמה:  $4^3 : 2^3 + 5 \cdot 3^2 = 64 : 8 + 5 \cdot 9 = 8 + 45 = 53$

### כללי חזקות

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$  ,  $(n, k \text{ טבעיים})$  דוגמה:  $6^3 \cdot 6^4 = 6^{3+4} = 6^7$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$  ,  $(n, k \text{ טבעיים}, n > k, a \neq 0)$  דוגמה:  $\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5$

$(a^n)^k = a^{k \cdot n} = a^{n \cdot k}$  ,  $(n, k \text{ טבעיים})$  דוגמה:  $(3^4)^8 = 3^{4 \cdot 8} = 3^{32}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$  ,  $(n \text{ טבעי})$  דוגמה:  $(3 \cdot 7)^5 = 3^5 \cdot 7^5$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  ,  $(n \text{ טבעי}, b \neq 0)$  דוגמה:  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2}$

$(a \neq 0) a^0 = 1$  ,  $0^0$  אינו מוגדר, דוגמה:  $(-2)^0 = 1$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ,  $a \neq 0$  , n טבעי, דוגמה:  $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4}$
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  ,  $a \neq 0$  , n טבעי, דוגמה:  $\frac{1}{3^5} = 3^{-5}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$  ,  $a \neq 0$  ,  $b \neq 0$  , n טבעי, דוגמה:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$
- הערה:

כללי החזקות עבור מעריכים טבעיים תקפים גם עבור כל המעריכים השלמים.

### כתיבה מדעית

• בכתיב מדעי המספר נכתב כמספר בין 1 ל-10 (לא כולל 10) כפול חזקה של 10.

✓ נוהגים לרשום מספר גדול בכתיב מדעי כך:  $a \cdot 10^n$  ,  $1 \leq a < 10$  , n מספר טבעי.

א. דוגמאות:  $54,689,328 = 5.4689328 \cdot 10^7 \approx 5.47 \cdot 10^7$

ב.  $10,000 = 10^4$

✓ נוהגים לרשום מספר קטן בכתיב מדעי כך:  $a \cdot 10^{-n}$  ,  $1 \leq a < 10$  , n מספר טבעי.

ג. דוגמה:  $0.000017 = \frac{17}{1,000,000} = \frac{17}{10^6} = \frac{1.7}{10^5} = 1.7 \cdot 10^{-5}$  או  $\underbrace{0.000017}_5 = 1.7 \cdot 10^{-5}$   
חזות

### שורשים ריבועיים

• הגדרה (תזכורת)

✓ לכל מספר a שאינו שלילי,  $b = \sqrt{a}$  הוא תמיד מספר אי-שלילי המקיים  $b^2 = a$ .

דוגמאות:

א.  $\sqrt{36} = 6$  , כי  $6^2 = 36$  ו-  $6 \geq 0$ . כלומר: השורש הריבועי של 36 הוא 6.

ב.  $\sqrt{0} = 0$  , כי  $0^2 = 0$ . כלומר: השורש הריבועי של 0 הוא 0.

✓ שורש ריבועי של מספר שלילי לא מוגדר במספרים הממשיים.

•  $\sqrt{a^2} = |a|$  לכל a.

• לגבי שורשים מתקיימים הכללים הבאים:

✓  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  ,  $(a \geq 0, b \geq 0)$

✓  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  ,  $(a \geq 0, b > 0)$

✓ שימו לב!  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  ,  $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$  ,  $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$  לכל  $a > 0$  ו-  $b > 0$ .

✓ עבור  $a \geq 0$  ו- k טבעי מתקיים הכלל:  $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$

## תרגול:

פשוטו את המכפלות הבאות לפי הדוגמה:  $3a^2 \cdot 4a^3 = 12a^5$ .

1.

$$\begin{array}{llll} \text{א.} & b \cdot 2b^3 \cdot 3b = \square & \text{ב.} & a^2 \cdot 5a^4 \cdot 2a = \square \\ \text{ג.} & (2c)^2 \cdot c^3 \cdot 2c = \square & \text{ד.} & (2a)^3 \cdot (3a)^2 = \square \\ \text{ה.} & (5a)^2 \cdot (2b)^2 \cdot 10ab = \square & \text{ו.} & (2ab)^3 \cdot (3bc)^2 = \square \end{array}$$

הקיפו את הביטוי השווה בערכו לביטוי  $(ab)^6$ :

2.

$$\text{א. } (a^3b^2)^2 \quad \text{ב. } (ab)^6 \cdot (a^3b)^2 \quad \text{ג. } b^2 \cdot (a^3b)^2 \quad \text{ד. } (a^2b)^2 \cdot (ab^2)^2$$

חשבו ללא מחשבון ורשמו את ערך הביטוי במשבצת המיועדת לכך:

3.

$$\begin{array}{llll} \text{א.} & \frac{49^{20}}{7^{39}} = \square & \text{ב.} & \frac{27^4}{3^{10}} = \square \\ \text{ג.} & \frac{16^{10}}{4^{21}} = \square & \text{ד.} & \frac{3^2 \cdot 9^4}{27^2} = \square \\ \text{ה.} & \frac{25^5 \cdot 5^5}{125^3} = \square & \text{ו.} & \frac{16^{10} \cdot 32^5}{4^{32}} = \square \\ \text{ז.} & \frac{10^3 \cdot 100^{10}}{1000^8} = \square & \text{ח.} & \frac{20^5 \cdot 5^3}{10^4 \cdot 20^3} = \square \\ \text{ט.} & \frac{49^{20} \cdot 4^{13}}{7^{34} \cdot 14^{25}} = \square & \text{י.} & \frac{18^4 \cdot 24^4}{6^6 \cdot 12^4} = \square \\ \text{יא.} & \frac{15^6 \cdot 75^{10}}{45^8 \cdot 5^{18}} = \square & \text{יב.} & \frac{18^5 \cdot 6^{10}}{12^8 \cdot 3^{12}} = \square \end{array}$$

בסעיפים הבאים, פשוטו וצמצמו את הביטוי תוך שימוש בחוקי החזקות.  
הציגו את תשובתכם באמצעות מעריכי חזקה חיוביים בלבד:

4.

$$\begin{array}{llll} \text{א.} & \frac{ab^2 \cdot (ab)}{a^2b} & \text{ב.} & \frac{a^3b \cdot (a^2b^2)}{b^2a^3 \cdot (ab)^2} \\ \text{ג.} & \frac{a^2 \cdot (ab^3) \cdot c^2}{b^3 \cdot (ac)^2} & \text{ד.} & \frac{(a^3b)^2 \cdot (a^4b)^3}{(ab^2)^3 \cdot (a^2b^2)^2} \\ \text{ה.} & \left(\frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a^2}\right) & \text{ו.} & \left(\frac{a}{b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{a}{c}\right)^3 \cdot ab^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right) & \text{ח.} & \left(\frac{ab^2}{c}\right) \cdot \left(\frac{ac}{b}\right)^2 \\ \text{ט.} & \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \cdot \left(\frac{2b}{a}\right)^2 & \text{י.} & \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a^2}\right)^2 \end{array}$$

## טכניקה אלגברית

### נוסחאות הכפל

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

### פירוק לגורמים

- פירוק לגורמים על-ידי הוצאת גורם משותף.
- פירוק לגורמים על-ידי נוסחאות הכפל.
- פירוק לגורמים לפי קבוצות.
- פירוק לגורמים של תלת איבר ריבועי (טרינום).

### צמצום, כפל וחילוק של שברים אלגבריים

- לפני צמצום שברים אלגבריים יש לבצע את הפעולות הבאות:
  - במידת האפשר מפרקים לגורמים את המונה ואת המכנה של השבר.
  - רושמים את תחום ההצבה של השבר.
- כלל הכפל בשברים: 
$$\left( b \neq 0, d \neq 0 \right) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- כלל החילוק בשברים: 
$$\left( b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \right) \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

### דוגמאות פתורות

פשטו את הביטויים הבאים.

- $(2x - 3)(2x + 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$
- $(5x - 1)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1^2 = 25x^2 - 10x + 1$
- $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- $(x - 4)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 - 4^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

## דוגמאות פתורות

פרקו לגורמים את הביטויים הבאים.

א.  $3a^2b + 6a^2b^2 - 12ab^3 = 3ab(a + 2ab - 4b^2)$

ב.  $3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) = 3(x^2 - 5^2) = 3(x - 5)(x + 5)$

ג.  $2x^2 - 24x + 72 = 2(x^2 - 12x + 36) = 2(x^2 - 12x + 6^2) = 2(x - 6)^2$

ד.  $45x^3 + 30x^2 + 5x = 5x(9x^2 + 6x + 1) = 5x((3x)^2 + 6x + 1^2) = 5x(3x + 1)^2$

ה.  $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = x(x^2 - 5x - 2x + 10) = x(x(x - 5) - 2(x - 5)) = x(x - 5)(x - 2)$

ו.  $2x^2 + 10x + 12 = 2(x^2 + 5x + 6) = 2(x + 2)(x + 3)$

## צמצום, כפל וחילוק של שברים אלגבריים

## דוגמאות פתורות

רשמו את תחומי ההצבה, וצמצמו את השברים הבאים.

א.  $\frac{27x^2 - 12}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{3(9x^2 - 4)}{(3x - 2)^2} = \frac{3(3x - 2)(3x + 2)}{(3x - 2)^2} = \frac{3(3x + 2)}{3x - 2}$

תחום ההצבה:  $x \neq \frac{2}{3}$ 

ב.  $\frac{x^2 - 2x - 8}{5x + 10} = \frac{(x + 2)(x - 4)}{5(x + 2)} = \frac{x - 4}{5}$

תחום ההצבה:  $x \neq -2$ 

ג.  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + x}{2x - 6} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x(x + 1)}{2(x - 3)} = \frac{x}{2}$

תחום ההצבה:  $x \neq 3, -1$ 

ד.  $\frac{x^2 - 12x + 36}{2x^2 - 32} \cdot \frac{x - 6}{3x - 12} = \frac{(x - 6)^2}{2(x^2 - 16)} \cdot \frac{x - 6}{3(x - 4)} = \frac{(x - 6)^2}{2(x - 4)(x + 4)} \cdot \frac{3(x - 4)}{x - 6} = \frac{3(x - 6)}{2(x + 4)}$

תחום ההצבה:  $x \neq \pm 4, 6$ 

## משוואות

## דוגמאות פתורות

פתרו את המשוואות הבאות.

א.  $(x - 12)^2 - x(x - 18) = 0$

$$x^2 - 24x + 144 - x^2 + 18x = 0$$

$$-6x + 144 = 0$$

$$-6x = -144$$

$$\boxed{x = 24}$$

בדקו את נכונות הפתרון באמצעות

הצבת  $x = 24$  בשני אגפי המשוואה

המקורית.

ב.

$$\frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1} - \frac{x - 5}{x^2 - x - 2} = 0$$

$$\frac{x + 4}{(x + 1)^2} - \frac{x - 5}{(x - 2)(x + 1)} = 0$$

$$/ \cdot (x + 1)^2(x - 2)$$

$$(x + 4)(x - 2) - (x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x^2 - 2x + 4x - 8 - (x^2 + x - 5x - 5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 - (x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 - x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 0.5}$$

בדקו את נכונות הפתרון באמצעות הצבת  $x = 0.5$ 

בשני אגפי המשוואה המקורית.

## משוואות ואי-שוויונות ממעלה שנייה (ריבועיות)

- כדי לפתור משוואות ריבועיות, יש להביא אותן לצורה הסטנדרטית  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), ואז לפתור אותן באמצעות נוסחת השורשים:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .  
 ✓ לפישוט המשוואה ולהבאתה לצורה כללית זו יש להשתמש בכללי הפישוט ובכינוס איברים.  
 ✓ אם המשוואה כוללת נעלם במכנה, יש לציין לפני פתרון המשוואה את תחום ההצבה, או לחלופין לפתור את המשוואה ולוודא שהתוצאה לא מאפסת שום מכנה במשוואה המקורית.  
 ✓ ניתן לפתור משוואה ריבועית (במיוחד משוואות ריבועיות חסרות) בדרכים קצרות יותר, ללא שימוש בנוסחת השורשים.
- מערכת משוואות עם שני נעלמים ממעלה שנייה היא מערכת משוואות הכוללת שני נעלמים, ובסופו של דבר מוביל פתרונה לפתרון משוואה ריבועית עם נעלם אחד.
- בדומה לאי-שוויון ממעלה רשונה, גם באי-שוויונות ממעלה שנייה, ניתן לבצע אותן פעולות כמו בפתרון משוואות – אך בהבדל אחד: אם כופלים או מחלקים את שני אגפי האי-שוויון במספר שלילי, יש להפוך את הכיוון של סימן האי-שוויון.

### משוואות ריבועיות

#### דוגמאות פתורות

פתרו את המשוואות הבאות.

א.  $x^2 - 36 = 0$

נבודד את  $x^2$ .

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

ב.  $x^2 - 7x = 0$

נוציא את הגורם המשותף.

$$x(x - 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ או } x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

ג.  $x^2 - 3x - 10 = 0$

נקבע את המקדמים.

$$a = 1, b = -3, c = -10$$

$$X_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3+7}{2} = 5 \\ & \frac{3-7}{2} = -2 \end{aligned}$$

ניתן לפתור גם באמצעות פירוק לגורמים של טרינום.

## דוגמה פתורה

פתרו את מערכת המשוואות הבאה.

$$\begin{cases} 2y+x=9 \\ y=-3x^2+4x+12 \end{cases}$$

פתרון:

ניעזר בשיטת ההצבה, ונציב במשוואה הראשונה את הביטוי  $-3x^2 + 4x + 12$  במקום הערך של  $y$ .

$$2(-3x^2 + 4x + 12) + x = 9 \Rightarrow -6x^2 + 8x + 24 + x - 9 = 0 \Rightarrow -6x^2 + 9x + 15 = 0$$

נחלק את המשוואה ב-  $(-3)$ , ונקבל  $2x^2 - 3x - 5 = 0$ .

$$2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 2.5, x_2 = -1$$

$$x_1 = 2.5 \Rightarrow y_1 = -3 \cdot 2.5^2 + 4 \cdot 2.5 + 12 = 3.25$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 12 = 5$$

תשובה:  $(-1, 5)$ ,  $(2.5, 3.25)$

## אי-שוויונות

## דוגמה פתורה

פתרו את האי-שוויון  $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ .

פתרון:

פתרונות האי-שוויון הם ערכי  $x$ , שעבורם הפונקציה הריבועית המתאימה  $y = x^2 - 7x + 10$  חיובית או אפס.

נמצא את שיעורי ה-  $x$  של נקודת האפס של גרף הפונקציה  $y = x^2 - 7x + 10$ .

לצורך זה נפתור את המשוואה  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .

פתרונות המשוואה הם  $x = 5$ ,  $x = 2$ .

$a = 1 > 0$ , ולכן הסקיצה של הפרבולה היא:



תשובה:  $x \geq 5$  או  $x \leq 2$  (כולל 2 ו- 5 שעבורם ערך הפונקציה הוא אפס).

## תרגול:

### I משוואות:

$$\frac{5}{x^2-4x} + \frac{45}{x^2+4x} = \frac{18}{x^2-16} \quad .18$$

$$\frac{x-3}{2x-10} - \frac{9x+57}{10x+50} = \frac{x-7}{x^2-25} \quad .17$$

$$\frac{3}{x^2+x} + \frac{1}{2x-2} = \frac{3}{x^2-1} \quad .20$$

$$\frac{20}{x^2-8x} - \frac{x-10}{x^2+8x} = \frac{36}{x^2-64} \quad .19$$

$$\frac{x-5}{2x^2-18} = \frac{x-3}{4x^2+6x-18} \quad .59$$

$$\frac{3x}{x^2+5x+6} = \frac{2x+2}{x^2+6x+9} \quad .58$$

$$\frac{1}{x-4} + \frac{7}{x+8} = \frac{4}{x+2} + \frac{14}{x^2+4x-32} \quad .61$$

$$\frac{5}{x^2+2x-3} + \frac{45}{x^2+10x+21} = \frac{18}{x^2+6x-7} \quad .60$$

תשובות:

.17, -10, 7, .18, .5, .19, .10, .20, -3, 2, .58, -4, .1, .59, 1, .6, .60, .2, .61, 2.5

### II מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 - 7x - 1 \quad (72) \\ y &= 2x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 2x + 1 \quad (71) \\ y &= -3x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3x - 7 \quad (70) \\ y &= -x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4y &= 1 \quad (75) \\ 2x^2 - 3y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y^2 - 2x &= -2 \quad (74) \\ 2y^2 + 4x &= 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - y &= 14 \quad (73) \\ x^2 - 4y &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-1)^2 &= 20 \quad (93) \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-1)^2 &= 5 \quad (92) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \quad (91) \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + x^2 - y^2 &= 60 \quad (105) \\ x + y + x^2 + y^2 &= 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3xy + y &= 13 \quad (104) \\ x - 3xy + y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy &= -7 \quad (103) \\ xy + 4y^2 &= 14 \end{aligned}$$

תשובות:

$$(3, 4) \quad (73) \quad (1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}) \quad (1, -4) \quad (72) \quad (3, -7) \quad (-1, -3) \quad (70)$$

$$(-4, 3), (4, -3), (4, 3) \quad (76) \quad (-1, 1), (1, 1) \quad (75) \quad (7, -2), (7, 2) \quad (74) \quad (-3, 4)$$

$$(1, -3), (7, 3) \quad (93) \quad (0, -1), (-2, 3) \quad (92) \quad (-4.4, 0.8), (2, 4) \quad (91)$$

$$(-9, -4), (-9, 3), (8, -4), (8, 3) \quad (105) \quad (3, 1), (1, 3) \quad (104) \quad (-1, 2), (1, -2) \quad (103)$$

### III אי שוויונות ריבועיים (פתרון אלגברי):

$$\begin{array}{lll}
 x^2 - 4x - 9 > 2x + 7 & (47) & 3x - x^2 \geq x + 1 & (46) & 8x - 2x^2 < 20 - x^2 & (45) \\
 3x^2 - 2x \geq 4x - 2x^2 + 8 & (50) & 3x^2 + 8x < x - 4 & (49) & x^2 + 3x < 9 - x^2 & (48) \\
 (x+5)(1-x) < (2x+1)^2 & (53) & x(2x+1) \geq 10(x-1) & (52) & (x-2)^2 \leq 9 & (51)
 \end{array}$$

תשובות:

$$\begin{array}{llll}
 x < 0 \text{ או } x > 5 & (40) & x \leq -1 \text{ או } x \geq 3 & (41) \\
 1 < x < 6 & (42) & x \neq -3 & (44) \\
 x \leq -\frac{4}{5} \text{ או } x \geq 2 & (50) & -1 < x < -\frac{1}{3} & (49) \\
 -3 < x < 1\frac{1}{2} & (48) & x \geq 3\frac{2}{3} & (56) \\
 -7 < x < 8 & (54) & x < -2 \text{ או } x > \frac{2}{5} & (53) \\
 x \leq 2 \text{ או } x \geq 2\frac{1}{2} & (52)
 \end{array}$$

### אי שוויונות ריבועיים (פתרון גרפי):

שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות על אותה מערכת צירים ומצא לאילו ערכי  $x$ :

א) גדולים ערכי הפונקציה (1) מערכי הפונקציה (2).

ב) קטנים ערכי הפונקציה (1) מערכי הפונקציה (2).

$$y = 3x - 1 \quad (1) \quad (7)$$

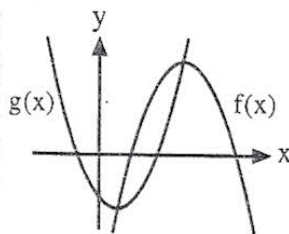
$$y = x^2 + 2 \quad (2)$$

$$y = -2x + 9 \quad (1) \quad (6)$$

$$y = -x^2 + 4x \quad (2)$$

$$y = -x - 6 \quad (1) \quad (5)$$

$$y = x^2 + 8x + 12 \quad (2)$$



17) בציור מתוארות הפונקציות:

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad \text{ו-} \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

מצא את התחום בו:

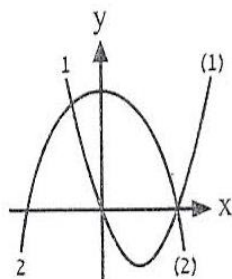
א.  $f(x) < g(x)$

ב.  $f(x) > 0$

ג.  $g(x) > 0$

ד.  $f(x) > 0$  וגם  $g(x) > 0$

ה.  $f(x)$  עולה וגם  $g(x)$  עולה.



18\*) הקודקוד של פרבולה (1) הוא  $(-4, 2)$  והקודקוד של פרבולה (2) הוא  $(0, 8)$ .

א. מצא את המשוואות של שתי הפרבולות.

ב. מצא לאילו ערכי  $x$  גדולים ערכי פרבולה (2) מערכי פרבולה (1).

ג. מצא לאילו ערכי  $x$  שתי הפרבולות יורדות ביחד.

תשובות:

5) א.  $-6 < x < -3$  ב.  $x < -6$  או  $x > -3$  6) א.  $x \neq 3$  ב. אף  $x$  7) א. אף  $x$  ב. כל  $x$

17) א.  $x > 3$  או  $x < \frac{1}{2}$  ב.  $1 < x < 5$  ג.  $x > 2$  או  $x < -1$  ד.  $2 < x < 5$

ה.  $\frac{1}{2} < x < 3$  18) א. (1)  $y = x^2 - 4x$  (2)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$  ב.  $-1\frac{1}{3} < x < 4$  ג.  $0 < x < 2$

## שאלות מילוליות

- בפתרון שאלה מילולית נתרגם את ה"מלל" המופיע בה ל"שפה מתמטית", כלומר - למשוואה.

שלבי הפתרון הם:

- ✓ קביעת הנעלם ובניית טבלה מתאימה (אם יש צורך).
- ✓ הרכבת משוואה.
- ✓ פתרון המשוואה.
- ✓ כתיבת תשובה.

### דוגמה פתורה

מחיר ק"ג בננות הוא 12 ש"ח, ומחיר ק"ג תפוזים הוא 6 ש"ח.  
יעל קנתה 9 ק"ג פרות (בננות ותפוזים ביחד).  
התשלום עבור הבננות היה גדול ב-18 ש"ח מהתשלום עבור התפוזים.  
כמה ק"ג פרות מכל סוג קנתה יעל?  
פתרון:

נרכז את הנתונים בטבלה הבאה:

| סך-הכול  | מחיר לק"ג | מספר ק"ג | בננות  |
|----------|-----------|----------|--------|
| $12x$    | 12        | $x$      |        |
| $6(9-x)$ | 6         | $9-x$    | תפוזים |

$$x = 4 \quad \leftarrow \quad 12x = 6(9-x) + 18$$

תשובה: יעל קנתה 4 ק"ג בננות ו-5 ק"ג תפוזים.

### דוגמאות פתורות

| א. חשבו                          | ב. 15% מכמות                    | ג. אילו אחוזים                   | ד. מהו המספר הקטן               | ה. מהו המספר                      |
|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 12% מ-500.                       | מסוימת הם 36.                   | מהווים 75 מ-300?                 | ב-30% מ-80?                     | הגדול ב-15%                       |
|                                  | חשבו את הכמות ההתחלתית.         |                                  |                                 | מ-120?                            |
| פתרון:                           | פתרון:                          | פתרון:                           | פתרון:                          | פתרון:                            |
| $500 \leftarrow a$               | $? \leftarrow a$                | $300 \leftarrow a$               | $80 \leftarrow a$               | $120 \leftarrow a$                |
| $12\% \leftarrow p$              | $15\% \leftarrow p$             | $? \leftarrow p$                 | $70\% \leftarrow p$             | $115\% \leftarrow p$              |
| $? \leftarrow m$                 | $36 \leftarrow m$               | $75 \leftarrow m$                | $? \leftarrow m$                | $? \leftarrow m$                  |
| $\frac{m}{500} = \frac{12}{100}$ | $\frac{36}{a} = \frac{15}{100}$ | $\frac{75}{300} = \frac{p}{100}$ | $\frac{m}{80} = \frac{70}{100}$ | $\frac{m}{120} = \frac{115}{100}$ |
| $m=60$                           | $a=240$                         | $p=25\%$                         | $m=56$                          | $m=138$                           |

$\frac{m}{a} = \frac{P}{100}$  מתקיימת הפרופורציה:  $\leftarrow$  כלומר:  $\frac{\text{ערך האחוז}}{\text{הכמות ההתחלתית (השלמה)}} = \frac{\text{אחוז}}{100}$   
 a מייצג את הכמות ההתחלתית (השלמה) - 100%.  
 p מייצג את האחוז.  
 m מייצג את ערך האחוז.

### דוגמה פתורה

מעין הלכה במהירות מסוימת מרחק של 9 ק"מ. בדרכה חזרה, בשל גשם סוחף, נאלצה להקטין את מהירותה ב- 2 קמ"ש. בסך-הכול הלכה מעין 3 שעות ו- 45 דקות.

מה היתה מהירותה הראשונה של מעין?

פתרון:

נרכז את הנתונים בטבלה הבאה.

|     | מהירות  | זמן             | דרך |
|-----|---------|-----------------|-----|
| הלך | $x$     | $\frac{9}{x}$   | 9   |
| חזר | $x - 2$ | $\frac{9}{x-2}$ | 9   |

הזמן בהלך ובחזר הוא  $3\frac{45}{60}$  שעות, ולכן המשוואה היא  $\frac{9}{x} + \frac{9}{x-2} = 3\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 6$ .  
תשובה: המהירות הראשונה של מעין היא 6 קמ"ש.

### **תרגול:**

9. בדרך כלל עוברת מכונית מרחק של 300 ק"מ במהירות מסוימת. באחד הימים הקטינה את מהירותה ב- 20 קמ"ש, ולכן דרכה נמשכה  $\frac{1}{2}$  שעה יותר מהזמן של יום רגיל.  
מצאו את מהירותה של המכונית בדרך כלל.

תשובה: 120 קמ"ש

10. בדרך כלל נוסעת מכונית במהירות קבועה מרחק של 360 ק"מ. יום אחד נסעה שעתיים במהירות קבועה, עצרה למשך שעה והמשיכה בדרכה במהירות הגדולה ב- 20 קמ"ש מהמהירות הקבועה שלה.  
המכונית הגיעה ליעדה באותו זמן, לו היתה נוסעת במהירות הקבועה ללא התעכבות. מה היתה מהירותה הקבועה של המכונית?

תשובה: 60 קמ"ש

11. גבי שוחה מרחק של 1.4 ק"מ במשך 20 דקות.

אחרי ששחה פעם אחת במהירות הרגילה במשך זמן מה, נח למשך 3 דקות, ולאחר מכן הגדיל את מהירותו ב- 10 מ' לדקה. הוא המשיך לשחות עד שסיים את המרחק הרגיל.

זמן השחייה באותו יום היה ארוך ב- 2 דקות לעומת זמן השחייה הרגיל.

א. כמה דקות שחה גבי עד שהתעכב?

ב. איזה מרחק שחה גבי עד שהתעכב?

תשובה : א) 12 דקות, ב) 480 מטר

12. משני מקומות, שהמרחק ביניהם 60 ק"מ, יצאו בו זמנית זה לקראת זה הולך רגל ורוכב אופניים.

מהירות הרוכב גדולה פי 4 ממהירות הולך הרגל. הרוכב והולך הרגל נפגשו אחרי שעתיים.

א. מצאו את מהירות רוכב האופניים.

ב. שני האנשים המשיכו בדרכם באותה המהירות שהיתה עד לפגישתם.

רוכב האופניים הגיע ליעדו, ומיד חזר לנקודת המוצא. הוא פגש

בדרכו חזרה את הולך הרגל. מצאו כמה זמן עבר בין שתי הפגישות.

תשובה : א) 24 קמ"ש, ב) שעה ו 20 דקות

## קדם אנליזה

נקודות חיתוך עם הצירים

נקודות החיתוך או ההשקה של גרף הפונקציה עם ציר  $x$  נקראות **נקודות אפס**.

לכל פונקציה המוגדרת עבור  $x = 0$  קיימת נקודת חיתוך עם ציר  $y$ .

למציאת נקודת חיתוך עם ציר  $y$  נציב  $x = 0$  במשוואת הפונקציה.

למציאת נקודות אפס נציב  $y = 0$  במשוואת הפונקציה.

נקודות קיצון

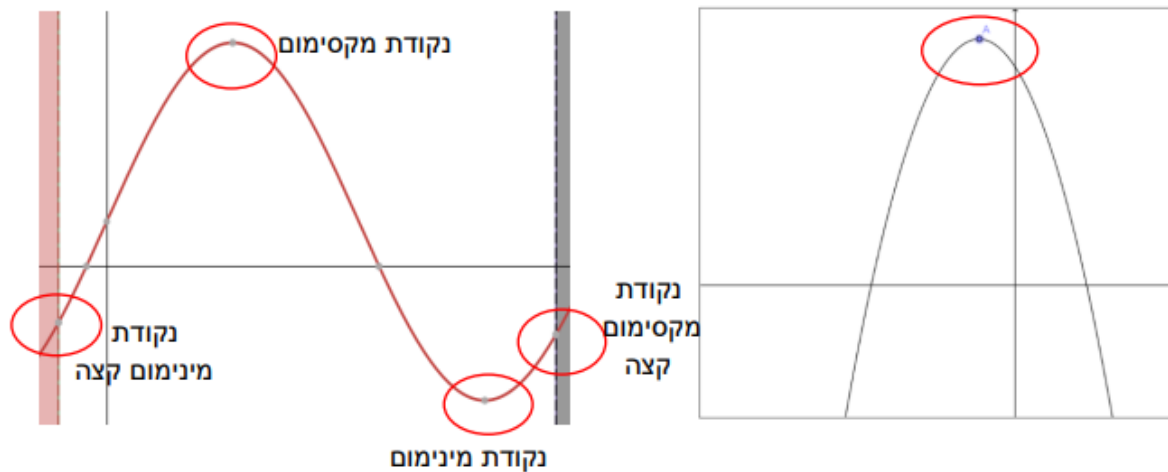
**נקודת מקסימום** היא הנקודה הכי גבוהה ב**סביבתה** (נקודת מעבר מעליה לירידה) - נקודה A בסרטוטים.

**נקודת מינימום** היא הנקודה הכי נמוכה ב**סביבתה** (נקודת מעבר מירידה לעליה) - נקודה B בסרטוטים.

**נקודות קיצון** הוא שם כולל לנקודות מקסימום ומינימום.

**נקודת קיצון קצה**: כאשר הפונקציה מוגדרת בתחום סגור (כולל קצוות), נקודות הקצה הן גם נקודות קיצון, משום שאלו הנקודות הכי גבוהות/ נמוכות בסביבתן.

ביחידה נעסוק בפונקציות כאלה שבהן נקודת המינימום או המקסימום מאפיינות מעבר מירידה לעליה או מעליה לירידה.



תחומי עליה וירידה של פונקציות

פונקציה עולה בתחום אם ככל ש  $x$  בתחום יותר גדול, ה-  $y$  יותר גדול.

כלומר, אם לכל שני ערכים  $x_1 < x_2$  בתחום מתקיים:  $f(x_1) < f(x_2)$ .

פונקציה יורדת בתחום אם ככל ש  $x$  בתחום יותר גדול, ה-  $y$  יותר קטן.

כלומר, אם לכל שני ערכים  $x_1 < x_2$  בתחום מתקיים:  $f(x_1) > f(x_2)$ .

פונקציה קבועה בתחום עבור כל ערך של  $x$  בתחום, ערכו של  $y$  נשאר קבוע

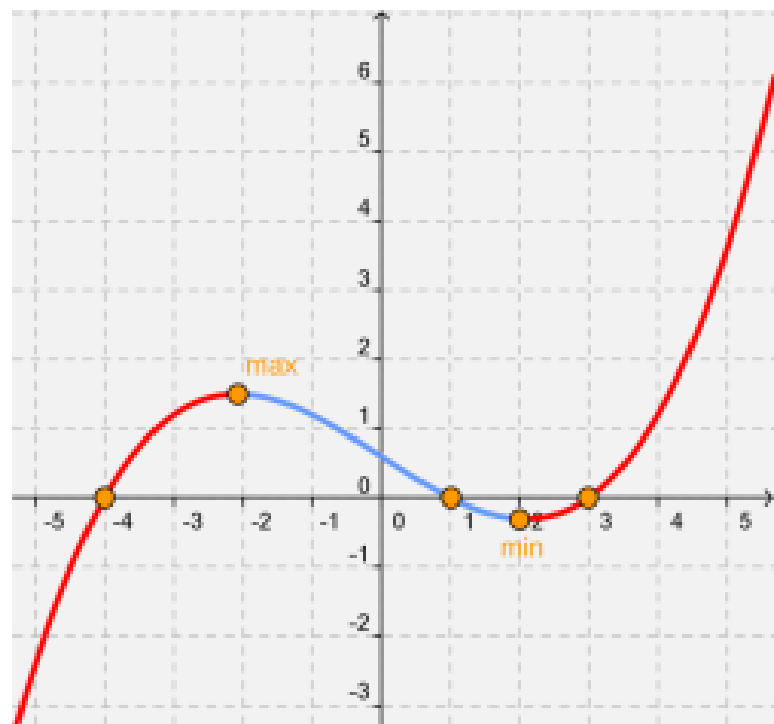
כלומר, אם לכל שני ערכים  $x_1 < x_2$  בתחום מתקיים:  $f(x_1) = f(x_2)$ .

נקודות הקיצון נכללות בתחומי העלייה והירידה.

למשל הפונקציה  $f(x) = x^2$  עולה בתחום  $x \geq 0$  ויורדת בתחום  $x \leq 0$ .

נתבונן בגרף הפונקציה  $f(x)$ .

נקודות הקיצון:  $(-2, 1.5)$ ,  $(2, -0.3)$



תחומי עלייה:  $x \leq -2$  או  $x \geq 2$

תחום ירידה:  $-2 \leq x \leq 2$

---

### תחומי חיוביות ושליליות של פונקציות

פונקציה נקראת חיובית בתחום חלקי כלשהו, אם כל ערכי הפונקציה ( $y$ ) חיוביים בתחום זה.  
פונקציה נקראת שלילית בתחום חלקי כלשהו, אם כל ערכי הפונקציה ( $y$ ) שליליים בתחום זה.  
המשמעות הגרפית:

פונקציה חיובית בתחום מסוים - הגרף נמצא מעל ציר ה- $x$  בתחום זה,

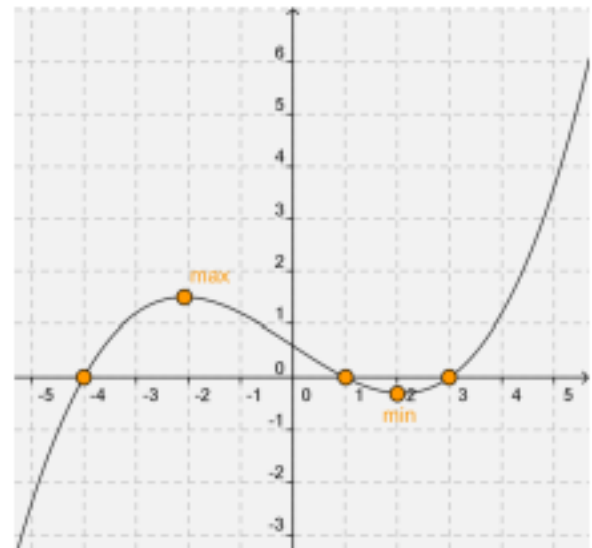
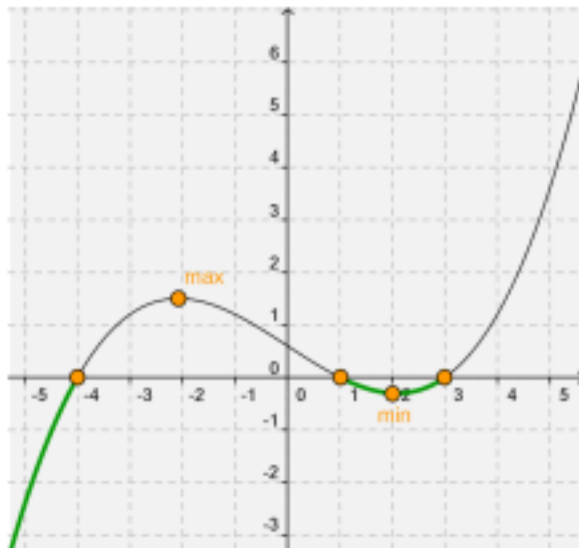
פונקציה שלילית בתחום מסוים - הגרף נמצא מתחת לציר ה- $x$  בתחום זה.

בכתיב מתמטי: אם לכל  $x$  בתחום מסוים  $D$  מתקיים  $f(x) > 0$  - פונקציה  $f(x)$  חיובית בתחום  $D$

אם לכל  $x$  בתחום מסוים  $D$  מתקיים  $f(x) < 0$  - פונקציה  $f(x)$  שלילית בתחום  $D$

נתבונן בגרף הפונקציה  $f(x)$ .

נקודות האפס:  $(-4,0)$   $(1,0)$   $(3,0)$



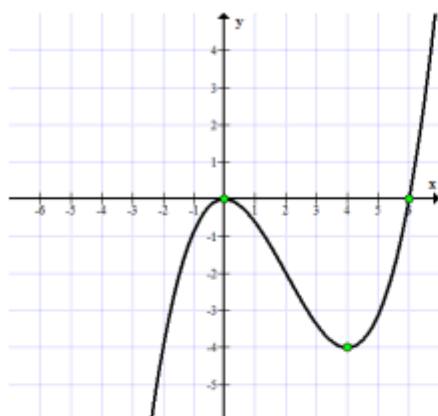
תחומי השליליות על פי הגרף:  $x < -4$  או  $1 < x < 3$

תחומי החיוביות על פי הגרף:  $-4 < x < 1$  או  $x > 3$

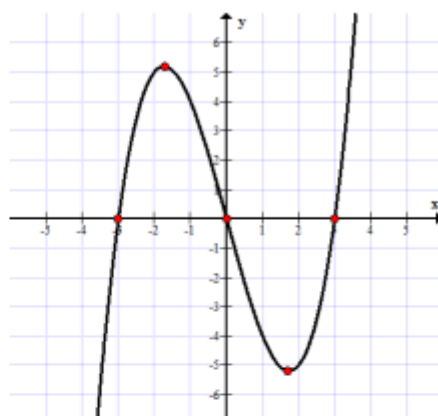
כל שינוי בחיוביות ושליליות של פונקציה רציפה יכול להתקיים אך ורק בנקודות אפס של הפונקציה

## תרגול:

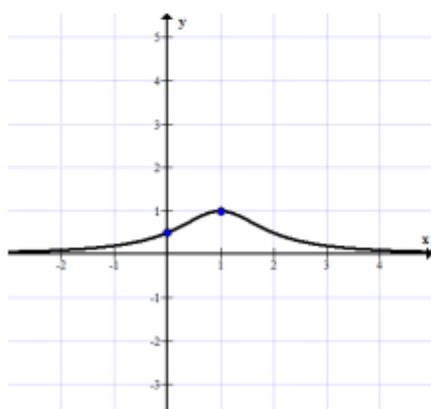
כתבו את תחומי החיוביות והשליליות ואת תחומי העליה והירידה של כל אחת מהפונקציות וגם נקודות קיצון של הפונקציות הבאות:



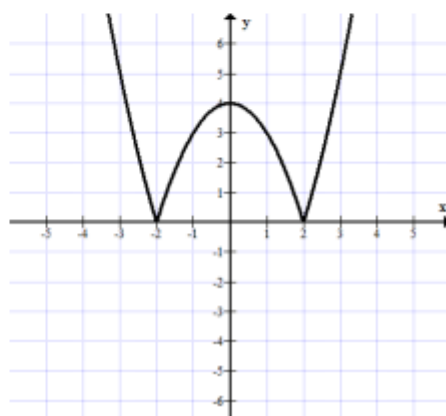
ד.



א.



ה.

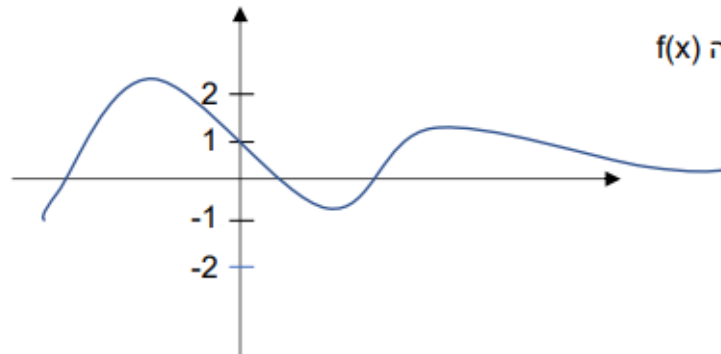


ב.

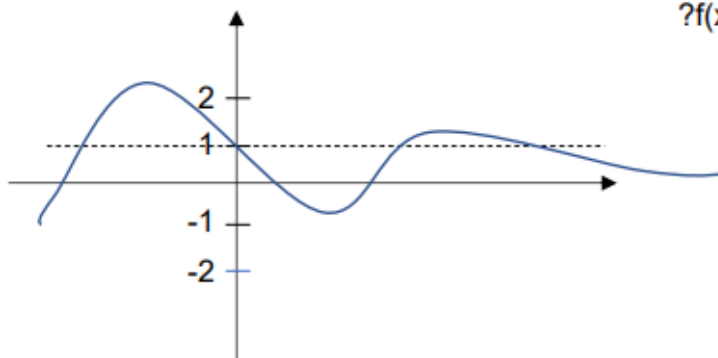
בהינתן גרף של פונקציה ניתן למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה שבה משווים את הפונקציה לערך נתון. במקרים מסוימים, ניתן גם למצוא את הערכים של הפתרונות. שימו לב, לגרף הפונקציה ולגרף של פונקציה קבועה יכולות להיות מספר **נקודות חיתוך**.

לדוגמה:

נתון גרף הפונקציה  $f(x)$



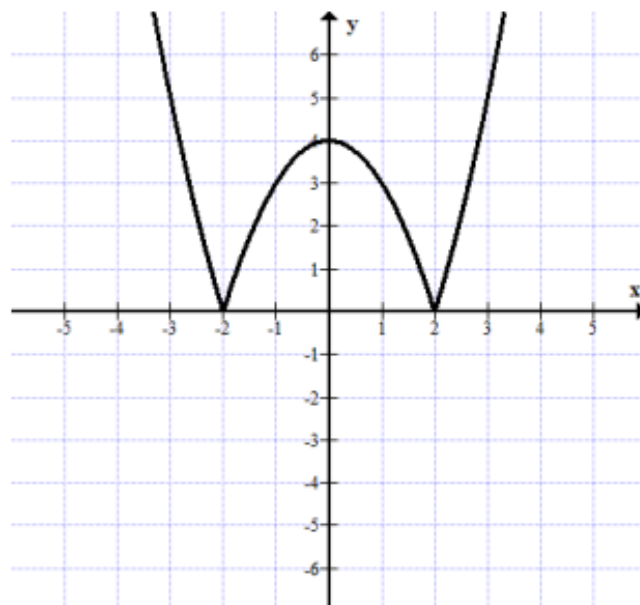
א. כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 1$ ?



4 פתרונות. הישר  $y = 1$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בארבע נקודות.

**תרגול:**

2. נתון גרף הפונקציה  $g(x)$



א. כמה פתרונות יש למשוואה  $g(x) = 1$ ?

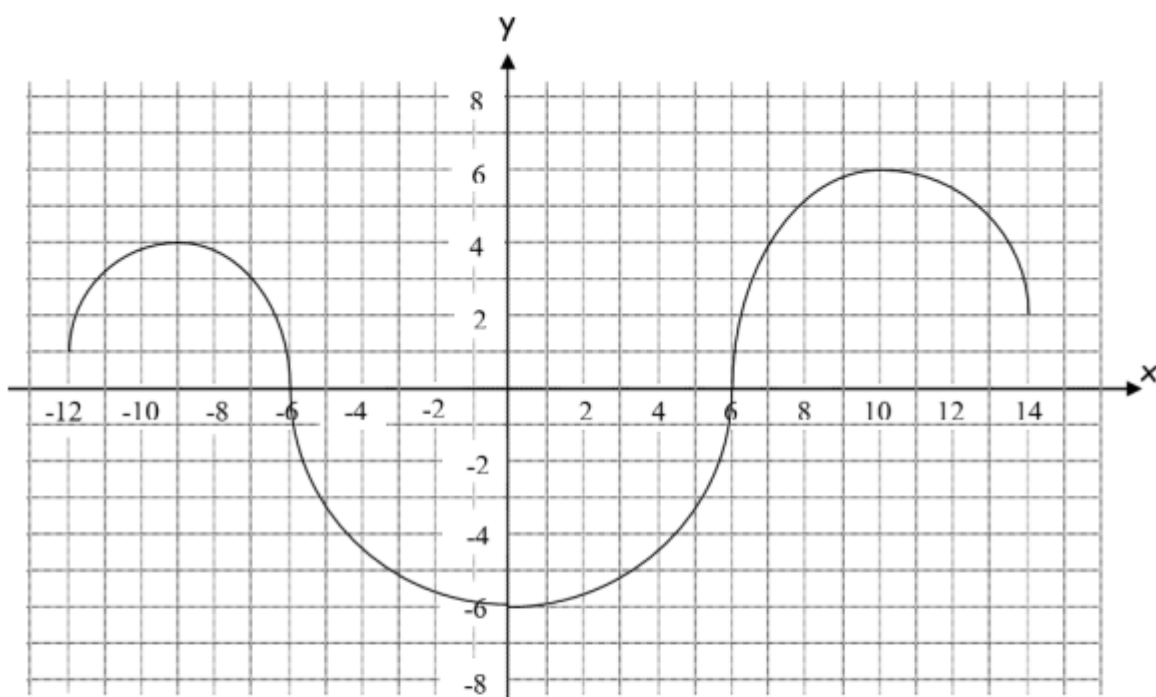
ב. כמה פתרונות יש למשוואה  $g(x) = 4$ ?

ג. פתרו את המשוואה  $g(x) = 5$

ד. כמה פתרונות יש למשוואה  $g(x) = -2$ ?

ה. פתרו את המשוואה  $g(x) = 0$

21. לפניך גרף של פונקציה  $f(x)$  בתחום  $[-12, 14]$ .



- א. מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ ?
- ב. מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ ?
- ג. מהן נקודות המכסימום והמינימום של הפונקציה?
- ד. באילו תחומים הפונקציה עולה ובאילו תחומים היא יורדת?
- ה. באילו תחומים הפונקציה חיובית ובאילו הפונקציה שלילית?
- ו. פתרו את המשוואות: (i)  $f(x) = 0$  ; (ii)  $f(x) = 5$  ; (iii)  $f(x) = 3$
- ז. פתרו את אי-השוויונים: (i)  $f(x) > 0$  ; (ii)  $f(x) \geq 3$  ; (iii)  $f(x) < -3$

ח. לפניכם שמונה טענות לגבי הפונקציה הנתונה (בעמוד הקודם). התבוננו בגרף וקיבעו לכל

טענה האם היא **אמת** או **שקר**:

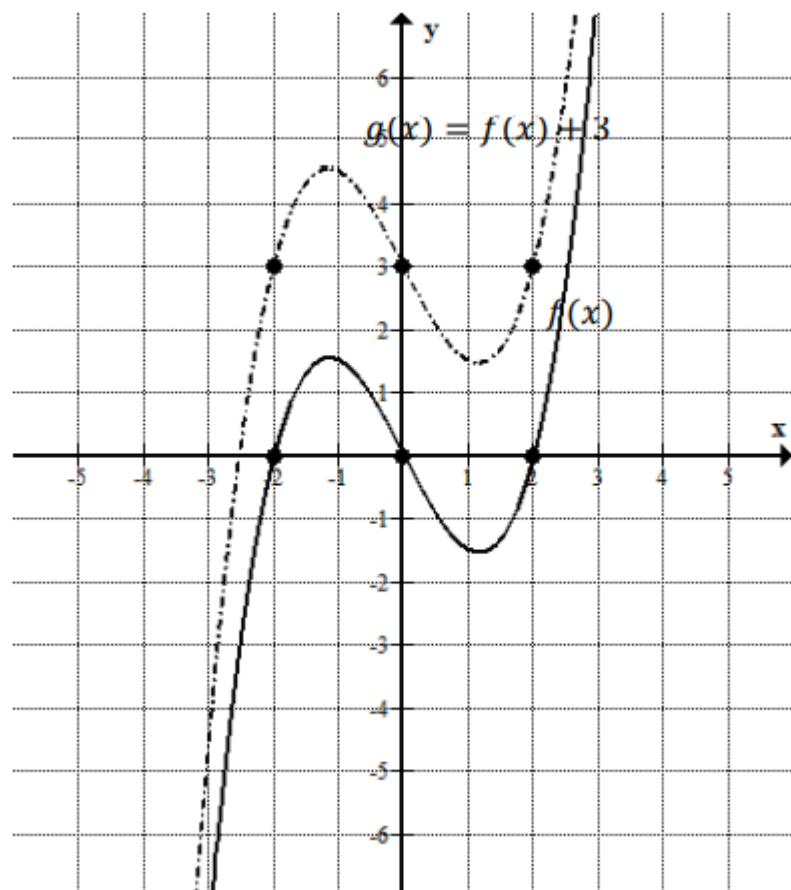
| הטענה                        | אמת או שקר? | הטענה                             | אמת או שקר? |
|------------------------------|-------------|-----------------------------------|-------------|
| א. $f(2) > 0$                | ה.          | ל $f(x)$ יש נק' מקסימום ב $x = 0$ | אמת או שקר? |
| ב. $f(-2) < 0$               | ו.          | $f(x)$ היא פונקציה עולה           | אמת או שקר? |
| ג. כאשר $x = 7$ , $f$ חיובית | ז.          | $f$ יורדת בתחום $[-9, 0]$         | אמת או שקר? |
| ד. $f$ יורדת ב- $x = 1$      | ח.          | $f$ עולה בתחום $x > 10$           | אמת או שקר? |

## הזזות אנכיות של פונקציות

הגרף של הפונקציה  $g(x) = f(x) + c$  מתקבל מהגרף של הפונקציה  $f(x)$  על ידי הזזה אנכית של כל נקודה בשיעור קבוע,  $c$ .  $(x, y) \rightarrow (x, y + a)$

דוגמאות:

- הפונקציה  $g(x) = x^2 + 2$  מתקבלת מהפונקציה  $f(x) = x^2$  על ידי הזזה אנכית של כל נקודה בשיעור קבוע, 2.
- הפונקציה  $g(x) = x^2 - 3$  מתקבלת מהפונקציה  $f(x) = x^2$  על ידי הזזה אנכית של כל נקודה בשיעור קבוע, -3.
- נתונות הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x) = f(x) + 3$ . הגרף של הפונקציה  $g(x)$  מתקבל מהגרף של הפונקציה  $f(x)$  על ידי הזזה אנכית של כל נקודה בשיעור קבוע, 3.



## הזזות אופקיות של פונקציות

הגרף של הפונקציה  $g(x) = f(x + c)$  מתקבל מהגרף של הפונקציה  $f(x)$  על ידי הזזה אופקית של כל נקודה בשיעור קבוע,  $|c|$ . אם  $c > 0$  ההזזה היא אופקית שמאלה. אם  $c < 0$  ההזזה היא אופקית ימינה.

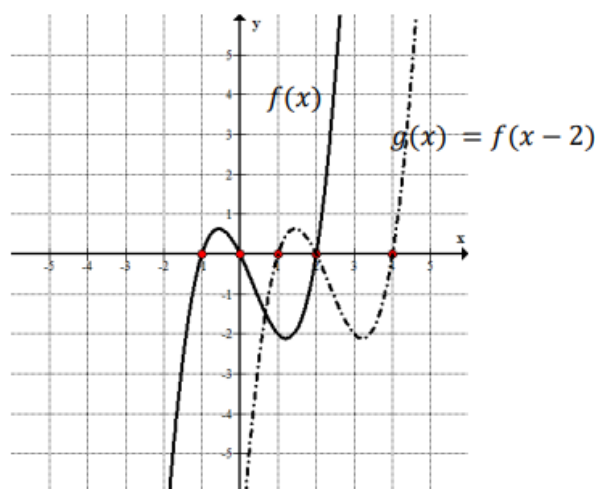
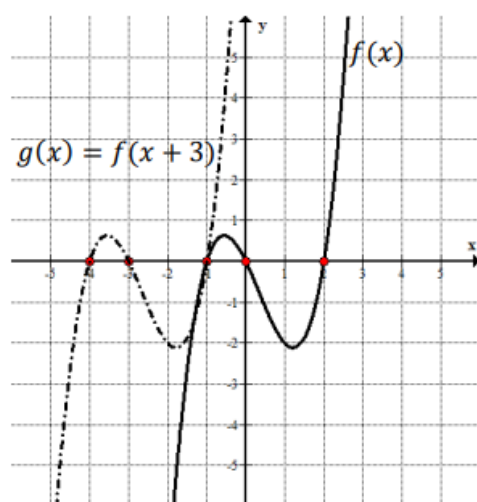
דוגמאות:

א. נתונות הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x) = f(x + 3)$ . הגרף של הפונקציה  $g(x)$  מתקבל מהגרף של הפונקציה  $f(x)$  על ידי הזזה אופקית של כל נקודה 3 יחידות שמאלה.

ב. נתונות הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x) = (x - 2)$ . הגרף של הפונקציה  $g(x)$  מתקבל מהגרף של הפונקציה  $f(x)$  על ידי הזזה אופקית של כל נקודה 2 יחידות ימינה.

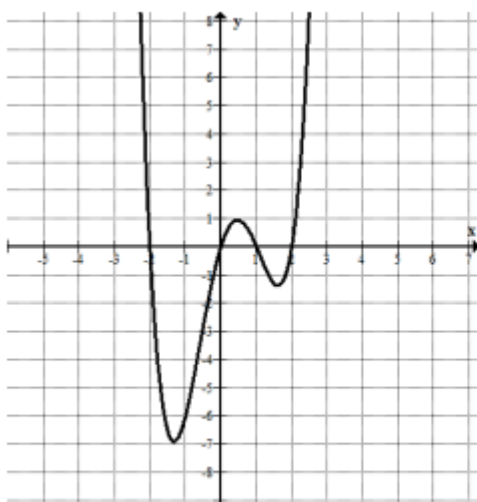
ג. הפונקציה  $g(x) = (x - 2)^2$  מתקבלת מהפונקציה  $f(x) = x^2$  על ידי הזזה אופקית של כל נקודה 2 יחידות ימינה.

ד. הפונקציה  $g(x) = (x + 3)^2$  מתקבלת מהפונקציה  $f(x) = x^2$  על ידי הזזה אופקית של כל נקודה 3 יחידות שמאלה.



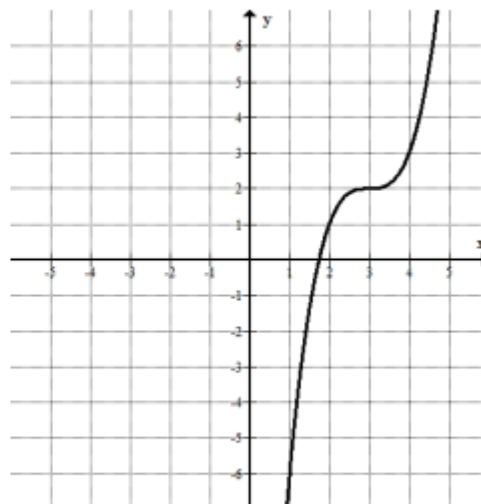
## תרגול:

שרטטו בכל מערכת צירים פונקציה  $g(x)$  שהיא הזזה של  $f(x)$   
וכתבו את המשוואה של  $g(x)$ .



הזזה אנכית למטה של יחידה אחת

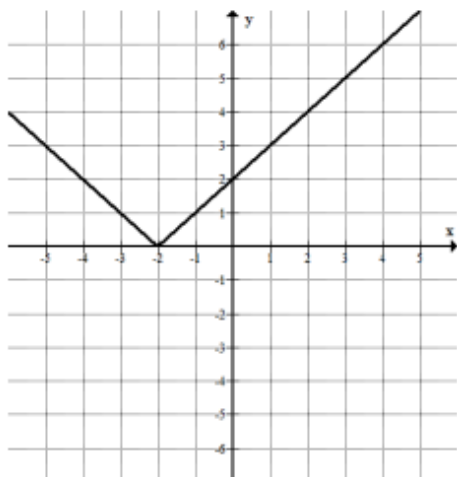
ד.



ג.

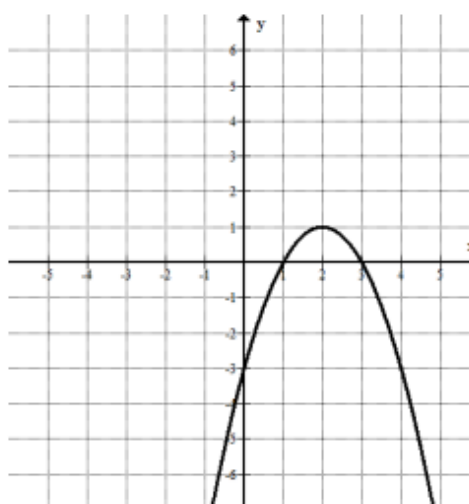
הזזה אנכית למעלה של 3 יחידות

שרטטו בכל מערכת צירים פונקציה  $g(x)$  שהיא הזזה של  $f(x)$  וכתבו את המשוואה של  $g(x)$ .



הזזה אופקית ימינה של 3 יחידות

ב.



א.

הזזה אופקית שמאלה של 2 יחידות

## הפונקציה הריבועית

- כל פונקציה, הנתונה באמצעות הנוסחה  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), נקראת **פונקציה ממעלה שנייה** או **פונקציה ריבועית**, והגרף שלה הוא פרבולה.

- כל פונקציה ריבועית ניתן להציג בצורה הסטנדרטית  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

ובצורה הקדקודית  $y = a(x - p)^2 + k$  ( $a \neq 0$ ); אך לא ניתן להציג כל פונקציה ריבועית בצורת המכפלה

$y = a(x - t)(x - r)$  ( $a \neq 0$ ), מכיוון שיש פונקציות ריבועיות, שלגרף שלהן אין נקודות אפס.

- המקדם  $a$  בהצגות הסטנדרטית, הקדקודית והכפלית של אותה פונקציה ריבועית הוא זהה.

אם  $a > 0$ , לפרבולה יש נקודת מינימום.

אם  $a < 0$ , לפרבולה יש נקודת מקסימום.

- בייצוג הקדקודי  $y = a(x - p)^2 + k$  ( $a \neq 0$ ):

✓ ציר הסימטריה הוא  $x = p$ .

✓ שיעורי נקודת הקדקוד  $(p, k)$ .

היתרון של הייצוג הקדקודי הוא שבאמצעותו ניתן לזהות את ציר הסימטריה, את הקדקוד ואת תחומי העלייה

והירידה של הפונקציה.

- בייצוג הסטנדרטי  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ):

✓ ציר הסימטריה הוא  $x = -\frac{b}{2a}$

✓ שיעורי נקודת הקדקוד:

$$x_{\text{קדקוד}} = -\frac{b}{2a}$$

מציבים את  $x_{\text{קדקוד}}$  בייצוג האלגברי  $y_{\text{קדקוד}} =$

✓ נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, c)$ .

היתרון של הייצוג הסטנדרטי הוא שבאמצעותו ניתן לזהות את נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .

- בייצוג כמכפלה  $y = a(x - t)(x - r)$  ( $a \neq 0$ ):

✓ נקודות האפס הן  $(r, 0)$  ו- $(t, 0)$ .

✓ ציר הסימטריה הוא  $x = \frac{r+t}{2}$ .

✓ שיעור ה- $x$  של הקדקוד הוא  $x_{\text{קדקוד}} = \frac{r+t}{2}$ .

היתרון של הייצוג כמכפלה הוא שבאמצעותו ניתן לזהות את נקודות האפס ואת תחומי החיוביות והשליליות.

• מעבר בין הייצוגים השונים של הפונקציה הריבועית.

- ✓ מייצוג קדקודי  $\xleftarrow{\text{פתיחת סוגריים}}$  לייצוג סטנדרטי.  
וכינוס איברים
- ✓ מייצוג סטנדרטי  $\xleftarrow{\text{השלמה לריבוע או שיעורי הקדקוד}}$  לייצוג קדקודי.
- ✓ מייצוג כמכפלה  $\xleftarrow{\text{פתיחת סוגריים}}$  לייצוג סטנדרטי.  
וכינוס איברים
- ✓ מייצוג סטנדרטי  $\xleftarrow{\text{פירוק לגורמים}}$  לייצוג כמכפלה (כאשר זה אפשרי).
- ✓ מייצוג כמכפלה  $\xleftarrow{\text{נקודות אפס}}$  לייצוג קדקודי.
- ✓ מייצוג קדקודי  $\xleftarrow{\text{נקודות אפס}}$  לייצוג כמכפלה (כאשר זה אפשרי).

• נקודת החיתוך של שתי פרבולות או פרבולה וקו ישר פתרון מערכת המשוואות של שתי הפונקציות הללו.

### דוגמה פתורה

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = -x + 4$  ו-  $g(x) = x^2 - 8x + 10$ .

א. התאימו לכל פונקציה את הגרף שלה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, M (קדקוד הפרבולה).

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

ד. מצאו את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה.

ה. מצאו את התחום שבו  $f(x) > g(x)$ .

פתרון:

א. הפונקציה  $g(x) = x^2 - 8x + 10$  היא ריבועית, ולכן הגרף שלה הוא פרבולה.

• הפונקציה  $f(x) = -x + 4$  היא קווית ומתאימה לישר AB.

ב. A ו- B הן נקודות החיתוך של הפרבולה והקו הישר, ולכן נפתור את מערכת המשוואות הבאה.

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 10 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 10 = -x + 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 6$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -x + 4 \Rightarrow y = -1 + 4 = 3 \Rightarrow \boxed{A(1, 3)}$$

$$x = 6 \Rightarrow y = -x + 4 \Rightarrow y = -6 + 4 = -2 \Rightarrow \boxed{B(6, -2)}$$

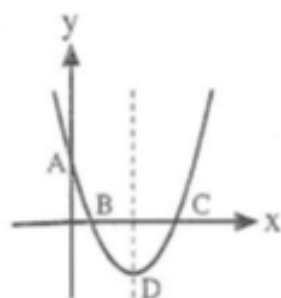
• הנקודה M היא קדקוד הפרבולה.

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{קדקוד}} &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4 \\ y_{\text{קדקוד}} &= 4^2 - 8 \cdot 4 + 10 = 16 - 32 + 10 = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{M(4, -6)}$$

ג. תחום העלייה:  $x > 4$ , תחום הירידה:  $x < 4$ .

ד. משוואת ציר הסימטריה היא  $x = 4$ .

ה. התחום שבו  $f(x) > g(x)$  הוא התחום שבו הקו הישר נמצא מעל הפרבולה, כלומר  $1 < x < 6$ .



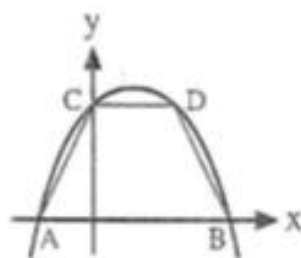
(1) בציור מתואר גרף הפרבולה  $y = x^2 - 10x + 16$

א. חשב את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.  
(D קודקוד הפרבולה).

ב. מצא את ציר הסימטריה של הפרבולה (הישר המקווקו)

ואת הנקודה שבה הוא חותך את ציר ה-x.

ג. הראה שהנקודה שמצאת בסעיף ב' נמצאת באמצע הקטע BC.



(3) בציור מתוארת הפרבולה  $y = -x^2 + 3x + 10$

הפרבולה חותכת את ציר ה-x בנקודות A ו-B ואת

ציר ה-y בנקודה C. דרך C מעבירים ישר המקביל

לציר ה-x שחותך את הפרבולה בנקודה נוספת D.

א. חשב את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. חשב את שטח הטרפז ABDC.

תשובות: 1) א.  $A(0, 16)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(8, 0)$ ,  $D(5, -9)$ . ב.  $x = 5$ ,  $(5, 0)$ .

3) א.  $A(-2, 0)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(0, 10)$ ,  $D(3, 10)$ . ב. 50.

נתונות הפונקציות:  $f(x) = (x-4)^2 + 2$ ,  $g(x) = (x-2)^2 - 4$ .

הקיפו את התשובה הנכונה. כדי לקבל את הפונקציה  $g(x)$  יש להזיז את הפונקציה  $f(x)$ :

א. 2 יחידות ימינה ו-4 יחידות מעלה.

ב. 2 יחידות שמאלה ו-2 יחידות מעלה.

ג. 2 יחידות שמאלה ו-6 יחידות מטה.

ד. 2 יחידות ימינה ו-6 יחידות מטה.

נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

א. מצאו נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים

ב. מצאו שיעורי קודקוד פרבולה

ג. שרטטו את גרף הפונקציה במערכת צירים

ד. חשבו את  $f(1)$

ה. האם הנקודה  $(1,2)$  נמצאת על גרף הפונקציה? נמקו

ו. רשמו עבור אלו ערכי  $x$  הפונקציה חיובית/שלילית

ז. רשמו עבור אלו ערכי  $x$  הפונקציה עולה/יורדת

ח. עבור אלו ערכי  $x$   $f(x)=5$ ?

ט. כמה נקודות חיתוך יש לפונקציה  $f(x)$  ולישר  $y=5$ ?

י. בטאו באמצעות  $a$  את  $f(a)$

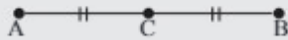
יא. הוסיפו לשרטוט את  $f(x)+3$

יב. האם  $f(x+4) = f(x)+4$ ? נמקו

# גיאומטריה במישור

## ארגז הכלים המצטבר

- **אמצע קטע:** נקודה, המחלקת קטע לשני קטעים שווים, נקראת **נקודת האמצע של הקטע**.



הנקודה C היא אמצע הקטע AB :  $AC = CB$ .

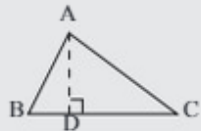


- **חוצה זווית במשולש:** קטע, היוצא מקדקוד זווית המשולש

ומחלק את הזווית לשתי זוויות שוות.

AD הוא חוצה הזווית BAC :  $\angle A_1 = \angle A_2$ .

- **גובה במשולש** (לצלע נתונה): קטע היוצא מקדקוד משולש ומאונך לצלע שממול (או להמשכה).



AD הוא גובה לצלע BC במשולש  $\triangle ABC$ .

הסימון:  $AD \perp BC$  או  $\angle ADC = 90^\circ$ .



- **תיכון במשולש:** קטע, המחבר את קדקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו.

AE הוא תיכון במשולש  $\triangle ABC$  :  $BE = EC$ .

- **זוויות צמודות**

משפט: סכום זוויות צמודות שווה ל-  $180^\circ$ .

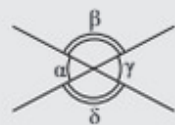
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



- **זוויות קדקודיות**

משפט: זוויות קדקודיות שוות זו לזו.

$$\beta = \delta, \alpha = \gamma$$



- **זוויות מתאימות וזוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים**

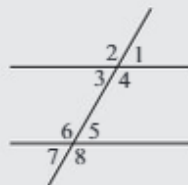
אם שני ישרים מקבילים נחתכים על-ידי ישר שלישי, אזי:

א. כל שתי זוויות מתחלפות שוות:

$$\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8, \angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$$

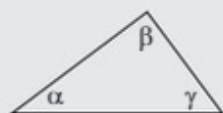
ב. כל שתי זוויות מתאימות שוות:

$$\angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$$



- **משפט:** סכום שלוש הזוויות במשולש כלשהו הוא  $180^\circ$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



• משפט: סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל  $n$  צלעות הוא  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

### • זווית חיצונית למשולש

✓ הגדרה: זווית הצמודה לזווית פנימית של המשולש נקראת "זווית חיצונית למשולש".



✓ משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי

הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

ולכן מתקיים:

✓ משפט: זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית

שאינה צמודה לה:

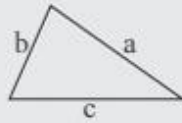
$$\gamma > \beta, \gamma > \alpha$$



• משפט: סכום אורכי שתי צלעות כלשהן במשולש גדול מאורכה של הצלע השלישית:

$$c + b > a, a + c > b, a + b > c$$

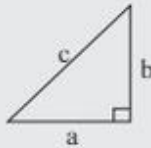
הערה: שלושת התנאים חייבים להתקיים בו-זמנית.



### • משפט פיתגורס

משפט: במשולש ישר-זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר:

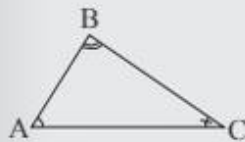
$$a^2 + b^2 = c^2$$



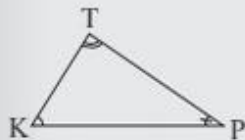
### • דמיון משולשים

✓ משפט: אם 3 זוויות במשולש האחד שוות בהתאמה ל-3 זוויות במשולש האחר,

אזי המשולשים דומים:



$$\triangle ABC \sim \triangle KTP \Leftrightarrow \begin{cases} \sphericalangle A = \sphericalangle K \\ \sphericalangle B = \sphericalangle T \\ \sphericalangle C = \sphericalangle P \end{cases}$$

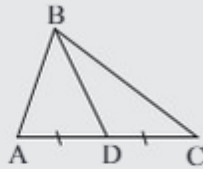


וקיים יחס קבוע בין אורכי הצלעות המתאימות, שנקרא **יחס הדמיון**.

$$\frac{AB}{KT} = \frac{BC}{TP} = \frac{AC}{KP}$$

✓ במשולשים דומים יחס השטחים הוא ריבוע היחס של הצלעות המתאימות שלהם (ריבוע יחס הדמיון).

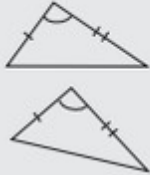
- משפט: התיכון לצלע במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי-שטח:



$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$$

- שני משולשים נקראים **חופפים**, אם אפשר להניח את אחד מהם על האחר כך שיכסה אותו בדיוק.

#### משפט חפיפה ראשון - צלע, זווית, צלע (צ.ז.צ)



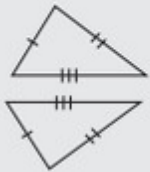
- אם שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן במשולש אחד שוות בהתאמה (אחת לאחת) לשתי הצלעות והזווית הכלואה ביניהן במשולש אחר, אזי המשולשים חופפים.

#### משפט חפיפה שני - זווית, צלע, זווית (ז.צ.ז)



- אם צלע ושתי הזוויות שלידה במשולש אחד שוות בהתאמה (אחת לאחת) לצלע ושתי הזוויות שלידה במשולש אחר, אזי המשולשים חופפים.

#### משפט חפיפה שלישי - צלע, צלע, צלע (צ.צ.צ)



- אם שלוש צלעות במשולש אחד שוות בהתאמה (אחת לאחת) לשלוש צלעות במשולש אחר, אזי המשולשים חופפים.

#### משפט חפיפה של משולשים ישרי-זווית

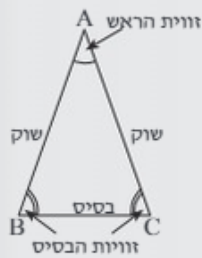


- אם ניצב ויתר במשולש ישר-זווית אחד שווים בהתאמה לניצב ויתר במשולש ישר-זווית אחר, אזי המשולשים חופפים.

- השיטה להוכחת שוויון בין שני קטעים או שתי זוויות:

- ✓ מחפשים שני משולשים מתאימים, שהקטעים או הזוויות הם חלקים מהם.
- ✓ באמצעות שלושה שוויונות, התואמים את אחד ממשפטי החפיפה, מוכיחים ששני המשולשים חופפים.
- ✓ מסיקים את השוויון המבוקש.

# משולש שווה-שוקיים ומשולש שווה-צלעות

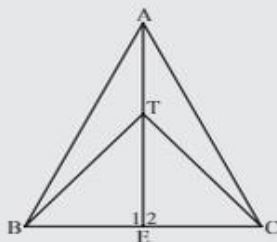


- הגדרה: משולש שווה-שוקיים - משולש ששתיים מצלעותיו שוות:  $AB = AC$ .
  - ✓ שוקיים - הצלעות השוות של המשולש:  $AB$  ו- $AC$ .
  - ✓ בסיס - הצלע הנוספת:  $BC$ .
  - ✓ זוויות הבסיס - שתי הזוויות שליד הבסיס:  $\angle B$  ו- $\angle C$ .
  - ✓ זווית הראש - הזווית שבין השוקיים:  $\angle A$ .

| משפטים המאפשרים לזהות משולש שווה-שוקיים                          | משפטים המציגים תכונות של משולש שווה-שוקיים                               |
|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| ✓ אם במשולש שתי זוויות שוות, אזי המשולש שווה-שוקיים.             | ✓ במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות.                                  |
| ✓ אם במשולש התיכון והגובה מתלכדים, אזי המשולש שווה-שוקיים.       | ✓ במשולש שווה-שוקיים התיכון לבסיס, הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים. |
| ✓ אם במשולש חוצה הזווית והגובה מתלכדים, אזי המשולש שווה-שוקיים.  |                                                                          |
| ✓ אם במשולש התיכון וחוצה הזווית מתלכדים, אזי המשולש שווה-שוקיים. |                                                                          |

- הגדרה: משולש שווה-צלעות - משולש שכל צלעותיו שוות:  $AB = AC = BC$ .
  - ✓ במשולש שווה-צלעות כל זווית שווה ל- $60^\circ$ :  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ .
  - ✓ משולש, שכל אחת מזוויותיו בת  $60^\circ$ , הוא משולש שווה-צלעות.
  - ✓ במשולש שווה-צלעות חוצה כל זווית במשולש הוא גם גובה לצלע שמול הזווית וגם תיכון לצלע שמול הזווית.

## דוגמה פתורה



המשולש  $\triangle ABC$  הוא שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ).  $AE$  תיכון לבסיס  $BC$ .  
הוכיחו: המשולש  $\triangle BTC$  הוא שווה-שוקיים.

הוכחה:

דרך א'

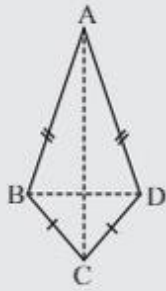
- ז. נתון,  $BE = CE$
- ז. במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.  $\angle E_1 = \angle E_2 = 90^\circ$
- ז. צלע משותפת,  $TE = TE$
- לפי משפט החפיפה ז.ז.ז.,  $\triangle TBE \cong \triangle TCE$
- במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה,  $TB = TC$
- $\triangle BTC$  הוא שווה-שוקיים.

מש"ל

דרך ב'

- נתון,  $BE = CE$
- במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים,  $\angle E_1 = \angle E_2$
- כי אם במשולש התיכון והגובה מתלכדים, אזי המשולש הוא שווה-שוקיים.  $\triangle BTC$  הוא שווה-שוקיים, כי אם במשולש התיכון והגובה מתלכדים, אזי המשולש הוא שווה-שוקיים.
- מש"ל

# דלתון



הגדרה: מרובע בעל שני זוגות זרים של צלעות סמוכות, השוות זו לזו, נקרא **דלתון**:

$$ABCD \text{ דלתון} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$$

הגדרות: מושגים הקשורים לדלתון.

✓ **קדקוד הראש** - נקודת חיתוך של שתי צלעות (סמוכות) השוות זו לזו.

בכל דלתון יש שני קדקודי ראש. בסרטוט: קדקודים A ו-C.

✓ **זווית הראש** - הזווית בקדקוד הראש. בסרטוט:  $\angle BAD$  ו- $\angle BCD$ .

✓ **זווית הצד** - הזוויות בשני הקדקודים האחרים. בסרטוט:  $\angle ABC$  ו- $\angle ADC$ .

✓ **אלכסון ראשי** - האלכסון המחבר את קדקודי הראש של הדלתון. בסרטוט: אלכסון AC.

✓ **אלכסון משני** - האלכסון האחר. בסרטוט: אלכסון BD.

| משפטים המאפשרים לזהות דלתון                                                  | משפטים המציגים תכונות של הדלתון                         |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| ✓ אם במרובע אלכסון חוצה את הזוויות הנגדיות, אזי הוא דלתון.                   | ✓ בדלתון זוויות הצד שוות זו לזו.                        |
| ✓ אם במרובע אלכסון אחד חוצה את האלכסון השני ומאונך לו, אזי המרובע הוא דלתון. | ✓ האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש.             |
|                                                                              | ✓ האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו. |



• **היקף הדלתון**, שאורכי צלעותיו הם a ו-b, הוא:

$$P = 2a + 2b$$

• **שטח הדלתון** שווה למחצית מכפלת אלכסונו:

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

## דוגמה פתורה

ATCP דלתון ( $CT = CP$ ,  $AT = AP$ ).

הנקודות B ו-D נמצאות על המשך האלכסון המשני TP משני צדדיו.

נתון:  $BT = DP$ .

הוכיחו: ABCD דלתון.

הוכחה:

צ.  $AT = AP$ , נתון,

, במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות.  $\angle T_1 = \angle P_1$

ז.  $\angle T_2 = \angle P_2$ , משלימות ל- $180^\circ$ .

צ.  $BT = DP$ , נתון,

$\Downarrow$

, לפי משפט החפיפה צ.צ.צ.  $\triangle ABT \cong \triangle ADP$

$\Downarrow$

, במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה,  $AB = AD$

באופן דומה ניתן להוכיח כי  $\triangle CBT \cong \triangle CDP$ , ולכן  $CB = CD$

$\Downarrow$

ABCD דלתון, מרובע בעל שני זוגות זרים של צלעות סמוכות, השוות זו לזו הוא דלתון.

# ישרים מקבילים

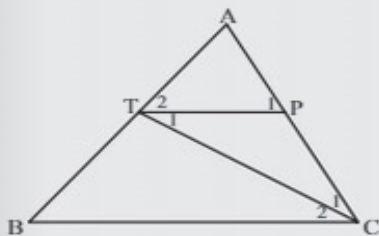


- הגדרה: ישרים הנמצאים באותו מישור ואינם נחתכים, נקראים **ישרים מקבילים**. הרישום המתמטי של ישר  $a$  המקביל לישר  $b$  הוא:  $a \parallel b$ .

| תכונות הזוויות שבין ישרים מקבילים                                  | משפט המאפשר לזהות ישרים מקבילים                  |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| אם שני ישרים מקבילים נחתכים על-ידי ישר שלישי, אזי:                 | אם שני ישרים נחתכים על-ידי ישר שלישי וקיים:      |
| א. כל שתי זוויות מתחלפות שוות:                                     | זוג אחד של זוויות מתחלפות שוות,                  |
| $\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8$                         | או                                               |
| $\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$                         | זוג אחד של זוויות מתאימות שוות,                  |
| ב. כל שתי זוויות מתאימות שוות:                                     | או                                               |
| $\angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8$                         | זוג אחד של זוויות חד-צדדיות שסכומן $180^\circ$ , |
| $\angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$                         | אזי הישרים מקבילים.                              |
| ג. הסכום של כל שתי זוויות חד-צדדיות שווה ל- $180^\circ$ :          | לדוגמה:                                          |
| $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ, \angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$ | אם $\gamma = \beta$ או $\alpha = \beta$          |
| $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ, \angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$ | $a \parallel b \iff \alpha + \delta = 180^\circ$ |

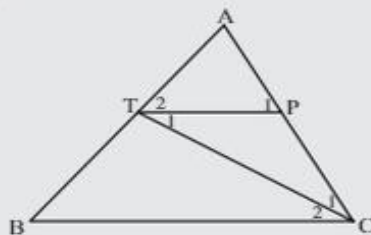
----- a  
----- b  
----- c

- משפט: אם שני ישרים מקבילים לישר שלישי, אזי הם מקבילים זה לזה:  
אם  $a \parallel c$  ו-  $b \parallel c$ , אזי  $a \parallel b$ .



## דוגמה פתורה

- במשולש  $\triangle ABC$  נתון:
- CT חוצה את הזווית  $\angle ACB$ ,  
 $TP = PC$ .
- א. הוכיחו:  $TP \parallel BC$ .
- ב. האם  $\triangle ATP \sim \triangle ABC$ ? הוכיחו.

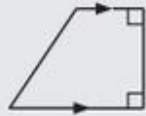
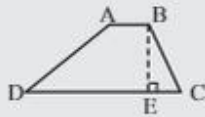


הוכחה:

- א.  $TP = PC$  נתון,  
 במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות.  
 נתון,  
 כלל המעבר,  
 אם שתי זוויות מתחלפות בין שני ישרים שוות, אזי שני הישרים מקבילים זה לזה.  
 מש"ל
- ב.  $\angle A = \angle A$  זווית משותפת,  
 $\angle T_1 = \angle C_1$  זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות.  
 $\angle C_1 = \angle C_2$  זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות.  
 $\angle T_1 = \angle C_2$   
 $TP \parallel BC$   
 $\angle A = \angle A$  זווית משותפת,  
 $\angle T_2 = \angle B$  זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות.  
 $\angle P_1 = \angle C_{1,2}$  זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות.  
 $\triangle ATP \sim \triangle ABC$  שלוש הזוויות בשני המשולשים שוות בהתאמה, ולכן המשולשים דומים.  
 מש"ל

# טרפז

הגדרות:



✓ מרובע, שבו רק שתיים מהצלעות הנגדיות מקבילות,

נקרא **טרפז**.

הצלעות המקבילות ( $AB \parallel DC$ ) נקראות **בסיסים**.

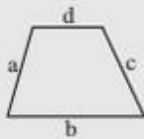
הצלעות שאינן מקבילות ( $AD \nparallel BC$ ) נקראות **שוקיים**.

המרחק בין שני הבסיסים נקרא **גובה** ( $BE$ ).

✓ טרפז בעל שתי זוויות ישרות נקרא **טרפז ישר-זווית**.

✓ טרפז, ששוקיו שוות זו לזו, נקרא **טרפז שווה-שוקיים**.

| משפטים המאפשרים לזהות טרפז                                 | משפטים המציגים תכונות של טרפז                              |
|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| שווה-שוקיים                                                | וטרפז שווה-שוקיים                                          |
| ✓ טרפז, שיש לו זוג זוויות בסיס שוות, הוא טרפז שווה-שוקיים. | ✓ בטרפז סכום שתי הזוויות שליד כל שוק שווה ל- $180^\circ$ . |
| ✓ טרפז, שאלכסוניו שווים, הוא טרפז שווה-שוקיים.             | ✓ בטרפז שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.              |
|                                                            | ✓ בטרפז שווה-שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.                |

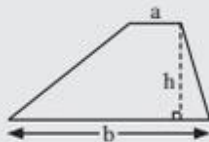


• **היקף מצולע** הוא סכום אורכי צלעותיו, ולכן:

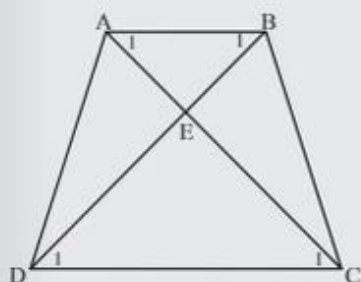
$$P = a + b + c + d$$

• **שטח טרפז שווה** למחצית מכפלת גובה הטרפז בסכום הבסיסים:

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$



## דוגמה פתורה



המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel DC$ ).

נתון:  $\angle B_1 = \angle C_1$ .

הוכיחו: הטרפז ABCD הוא שווה-שוקיים.

הוכחה:

טרפז ABCD , נתון

$\Downarrow$

$AB \parallel DC$

$\Downarrow$

$\angle A_1 = \angle C_1$

, זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות.

$\angle B_1 = \angle C_1$

, נתון

$\Downarrow$

$\angle A_1 = \angle B_1$

, כלל המעבר

$\Downarrow$

$AE = BE$

, אם במשולש שתי זוויות שוות, אזי המשולש שווה-שוקיים.

$\angle B_1 = \angle D_1$

, זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות.

$\angle B_1 = \angle C_1$

, נתון

$\Downarrow$

$\angle D_1 = \angle C_1$

, כלל המעבר

$\Downarrow$

$DE = CE$

, אם במשולש שתי זוויות שוות, אזי המשולש שווה-שוקיים.

$\Downarrow$

$AE + CE = BE + DE$  , חיבור קטעים שווים

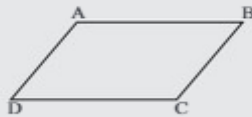
$\Downarrow$

$AC = BD$

$\Downarrow$

טרפז ABCD שווה-שוקיים , טרפז שאלכסוניו שווים, הוא טרפז שווה-שוקיים.

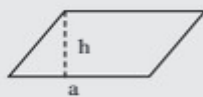
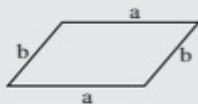
# מקבילית



הגדרה: מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו נקרא **מקבילית**:

$$BC \parallel AD, AB \parallel DC$$

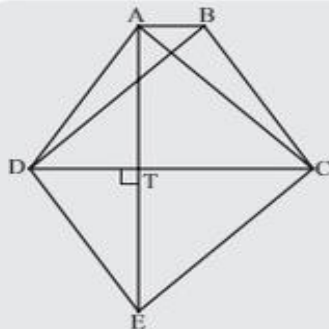
| משפטים המאפשרים לזהות מקבילית                                             | משפטים המציגים תכונות של מקבילית                           |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| ✓ מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו הוא מקבילית (הגדרה). | ✓ במקבילית שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו.          |
| ✓ מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.            | ✓ במקבילית שני זוגות של זוויות נגדיות שוות זו לזו.         |
| ✓ מרובע בעל שני זוגות של זוויות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.           | ✓ במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות שווה ל- $180^\circ$ . |
| ✓ מרובע בעל זוג אחד של צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית.            | ✓ במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.                       |
| ✓ מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.                             |                                                            |



• **היקף מקבילית**, שאורכי צלעותיה הם  $a$  ו- $b$ , הוא:  $P = 2a + 2b$

• **שטח מקבילית** שווה למכפלת צלע בגובה לצלע זו:  $S = a \cdot h$

הערה: כדי למצוא את שטח המקבילית לא חשוב איזו צלע בוחרים; אך יש לחשב את מכפלת הצלע בגובה המורד אליה.



## דוגמה פתורה

המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ).

נתון:  $AT = TE$ ,  $AT \perp DC$ .

הוכיחו:  $BD \parallel CE$ ,  $DE \parallel BC$ .

הוכחה:

נתון,  $AT \perp DC$

נתון,  $AT = TE$

⇓

, אם במשולש התיכון והגובה מתלכדים, אזי המשולש הוא שווה-שוקיים.

$$AD = DE$$

, אם במשולש התיכון והגובה מתלכדים, אזי המשולש הוא שווה-שוקיים.

$$AC = CE$$

נתון,

$$AD = BC$$

⇓

, כלל המעבר

$$\boxed{DE = BC}$$

, בטרפז שווה-שוקיים האלכסונים שווים.

$$AC = BD$$

⇓

, כלל המעבר

$$\boxed{BD = CE}$$

⇓

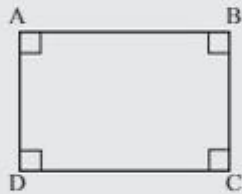
, מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.

ABCD מקבילית

⇓

, במקבילית הצלעות הנגדיות מקבילות.  $BD \parallel CE$ ,  $DE \parallel BC$

# מלבן



הגדרה : מרובע בעל ארבע זוויות ישרות נקרא **מלבן** :

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

| משפטים המאפשרים לזהות מלבן                      | משפטים המציגים תכונות של מלבן                     |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| ✓ מרובע בעל ארבע זוויות ישרות הוא מלבן (הגדרה). | ✓ במלבן שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו. |
| ✓ מקבילית, שאחת מזוויותיה ישרה, היא מלבן.       | ✓ במלבן שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו.    |
| ✓ מקבילית, שאלכסוניה שווים זה לזה, היא מלבן.    | ✓ במלבן האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה.   |

משפטים על התיכון ליתר במשולש ישר-זווית

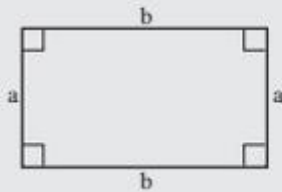
✓ במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

✓ אם במשולש קיים תיכון לאחת הצלעות השווה למחצית הצלע שהוא חוצה, אזי המשולש הוא ישר-זווית.

משפטים על משולש ישר-זווית שבו זווית חדה בת  $30^\circ$

✓ במשולש ישר-זווית, שאחת מזוויותיו בת  $30^\circ$ , הניצב שמול זווית זו שווה למחצית היתר.

✓ אם במשולש ישר-זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אזי הזווית שמול ניצב זה שווה ל- $30^\circ$ .



• **היקף מלבן**, שאורכי צלעותיו  $a$  ו- $b$ , הוא :  $P = 2a + 2b = 2(a + b)$ .

• **שטח מלבן** שווה למכפלת שתי צלעותיו הסמוכות :  $S = a \cdot b$ .

## דוגמה פתורה

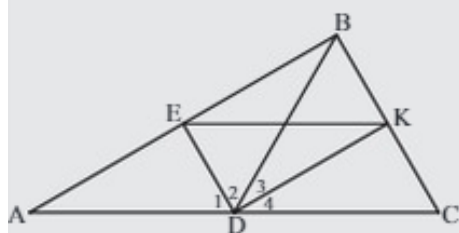
במשולש  $\triangle ABC$  נתון:

$$AB \perp BC, \angle D_3 = \angle D_4, \angle D_1 = \angle D_2, AD = DC$$

א. הוכיחו: מרובע  $BKDE$  הוא מלבן.

ב. הוכיחו:  $AC = 2 \cdot EK$ .

ג. נתון גם:  $BC = \frac{1}{2} \cdot AC$ . חשבו את זוויות המשולש  $\triangle ABC$ .



הוכחה:

א. נתון,  $\angle ABC = 90^\circ$

נתון,  $AD = DC$

$\Downarrow$

במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר,  $BD = AD = DC$

נתון,  $\angle D_1 = \angle D_2$

$\Downarrow$

במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ADB$  הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים,  $\angle BED = 90^\circ$

נתון,  $\angle D_3 = \angle D_4$

$\Downarrow$

במשולש שווה-שוקיים  $\triangle BDC$  הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים,  $\angle BKD = 90^\circ$

$\Downarrow$

סכום הזוויות במרובע  $360^\circ$ ,  $\angle EDK = 90^\circ$

$\Downarrow$

מרובע בעל ארבע זוויות ישרות הוא מלבן.  $BKDE$  מלבן

מש"ל

ב. במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר,  $AC = 2 \cdot BD$

במלבן האלכסונים שווים זה לזה,  $EK = BD$

$\Downarrow$

כלל המעבר,  $AC = 2 \cdot EK$

מש"ל

ג. נתון,  $BC = \frac{1}{2} \cdot AC$

נתון,  $\angle ABC = 90^\circ$

$\Downarrow$

אם במשולש ישר-זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר,  $\angle A = 30^\circ$

אזי הזווית שמול ניצב זה שווה ל-  $30^\circ$ .

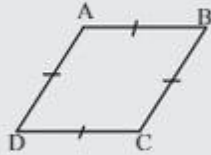
$\Downarrow$

סכום הזוויות במשולש  $180^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$

זוויות המשולש  $\triangle ABC$  הן:  $30^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ .

מש"ל

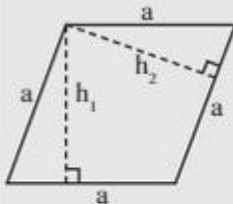
# מעוין



- הגדרה: מרובע בעל ארבע צלעות שוות נקרא **מעוין**:

$$AB = BC = CD = DA$$

| משפטים המאפשרים לזהות מעוין                                 | משפטים המציגים תכונות של מעוין                                             |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| ✓ מרובע בעל ארבע צלעות שוות הוא מעוין (הגדרה).              | ✓ במעוין שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.                         |
| ✓ מקבילית, ששתי צלעותיה הסמוכות שוות, היא מעוין.            | ✓ במעוין שני זוגות של זוויות נגדיות שוות זו לזו.                           |
| ✓ מקבילית, שאלכסוניה מאונכים זה לזה, היא מעוין.             | ✓ במעוין האלכסונים חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין. |
| ✓ מקבילית, שאחד מאלכסוניה חוצה את אחת מזוויותיה, היא מעוין. |                                                                            |



- היקף **מעוין** שווה למכפלת אורך צלע המעוין ב- 4 :

$$P = a + a + a + a = 4a$$

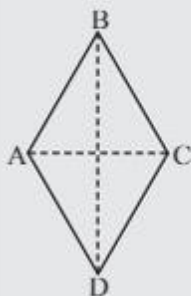
- שטח מעוין** (כמקרה פרטי של שטח מקבילית) שווה

למכפלה של צלע בגובה לצלע זו :

$$S = a \cdot h_1 \text{ או } S = a \cdot h_2$$

שימו לב!

כדי למצוא את שטח המעוין, לא חשוב איזו צלע או איזה גובה בוחרים, כי במעוין כל הצלעות שוות וגם הגבהים שווים (הסבירו מדוע).

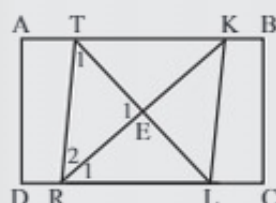


- שטח מעוין** (כמקרה פרטי של מרובע שאלכסוניה מאונכים)

שווה למחצית מכפלת אלכסוניה :

$$S = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

## דוגמה פתורה



המרובע ABCD הוא מלבן.

נתון:  $\angle R_1 = 41^\circ$ ,  $LT \perp KR$ ,  $AT = LC$ ,  $KB = DR$ .

א. הוכיחו: המרובע TKLR הוא מעוין.

ב. מצאו את זוויות המשולש  $\triangle TRE$ .

הוכחה:

א. ABCD מלבן , נתון ,  
 $AB = DC$  , במלבן הצלעות הנגדיות שוות ,  
 $KB = DR$  , נתון ,  
 $AT = LC$  , נתון ,

$\Downarrow$

$AB - AT - KB = DC - LC - DR$  , חיסור קטעים שווים.

$\Downarrow$

$$\boxed{TK = RL}$$

$$AB \parallel DC$$

$\Downarrow$

$$\boxed{TK \parallel RL}$$

$\Downarrow$

TKLP מקבילית

$$LT \perp KR$$

$\Downarrow$

TKLR מעוין

, במלבן הצלעות הנגדיות מקבילות זו לזו.

, מרובע בעל זוג אחד של צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית. , נתון ,

, מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין.

מש"ל

ב.  $\angle R_1 = 41^\circ$  , נתון ,  
 $\angle R_1 = \angle R_2 = 41^\circ$  , במעוין האלכסונים חוצים את זוויות המעוין. ,  
 $\angle E_1 = 90^\circ$  , נתון ,

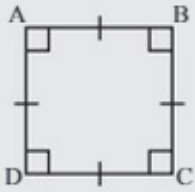
$\Downarrow$

$\angle T_1 = 49^\circ$  , סכום זוויות במשולש  $180^\circ$  ,

זוויות המשולש  $\triangle TRE$  הן:  $41^\circ$ ,  $49^\circ$ ,  $90^\circ$ .

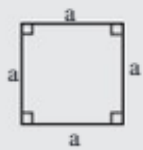
מש"ל

# ריבוע



- הגדרה: מרובע, שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות, הוא **ריבוע**:  
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,  $AB = BC = CD = DA$

| משפטים המאפשרים לזהות ריבוע                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | משפטים המציגים תכונות של ריבוע                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ מרובע, שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות, הוא ריבוע (הגדרה).</li> <li>✓ מלבן, ששתיים מצלעותיו הסמוכות שוות, הוא ריבוע.</li> <li>✓ מלבן, שאלכסוניו מאונכים זה לזה, הוא ריבוע.</li> <li>✓ מלבן, שאחד מאלכסוניו חוצה זווית אחת, הוא ריבוע.</li> <li>✓ מעוין בעל זווית ישרה הוא ריבוע.</li> <li>✓ מעוין, שאלכסוניו שווים זה לזה, הוא ריבוע.</li> <li>✓ מרובע, שאלכסוניו חוצים זה את זה, שווים זה לזה ומאונכים זה לזה, הוא ריבוע.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ בריבוע שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.</li> <li>✓ בריבוע האלכסונים חוצים זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.</li> </ul> |



- **היקף ריבוע** שווה למכפלת אורך צלעו ב- 4:

$$P = 4a$$

- **שטח ריבוע** שווה לאורך צלע הריבוע בחזקת שניים:

$$S = a \cdot a = a^2$$

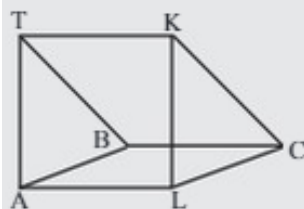
או



- **שטח הריבוע** (כמקרה פרטי של מעוין) שווה למחצית מכפלת אלכסוניו:

$$S = \frac{m^2}{2}$$

## דוגמה פתורה



המרובע TKLA הוא ריבוע.

המרובע BCLA הוא מקבילית.

נתון :  $\angle TAB = \angle TBA$ .

הוכיחו : המרובע TKCB הוא מעוין.

הוכחה :

TKLA ריבוע

↓

$TK \parallel AL, TK = AL$

BCLA מקבילית

↓

$BC \parallel AL, BC = AL$

↓

$TK \parallel BC, TK = BC$

↓

TKCB מקבילית

$\angle TAB = \angle TBA$

$TA = TB$

$TA = TK$

↓

$TK = TB$

↓

TKCB מעוין

, נתון

, בריבוע הצלעות הנגדיות שוות ומקבילות.

, נתון

, במקבילית הצלעות הנגדיות שוות ומקבילות.

, כלל המעבר

, מרובע בעל זוג אחד של צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית.

, נתון

, אם במשולש שתי זוויות שוות, אזי המשולש שווה-שוקיים.

, בריבוע הצלעות שוות.

, כלל המעבר

, מקבילית, ששתי צלעותיה הסמוכות שוות, היא מעוין.

מש"ל

# משולשים

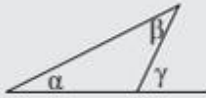
## זווית חיצונית למשולש



✓ הגדרה: זווית, הצמודה לזווית פנימית של המשולש, נקראת "זווית חיצונית למשולש".

✓ משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה:

$$\gamma = \alpha + \beta$$



✓ משפט: זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.

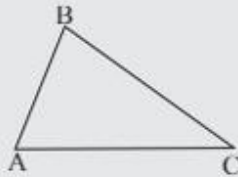
$$\gamma > \beta, \gamma > \alpha$$

## הקשר בין צלעות לזוויות במשולש

✓ משפט: אם במשולש שתי צלעות שונות באורכן, אזי

מול הצלע הארוכה מביניהן נמצאת הזווית הגדולה.

$$\angle A > \angle C \iff BC > AB$$



✓ משפט: אם במשולש שתי זוויות שונות בגודלן,

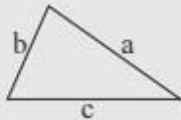
אזי מול הזווית הגדולה מביניהן נמצאת הצלע הארוכה.

$$BC > AB \iff \angle A > \angle C$$

## הקשר בין צלעות במשולש

✓ משפט: סכום אורכי שתי צלעות כלשהן במשולש גדול מאורכה

של הצלע השלישית:



$$c + b > a, a + c > b, a + b > c$$

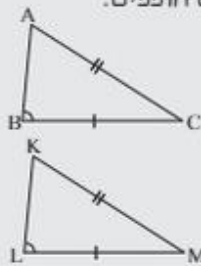
הערה: שלושת התנאים חייבים להתקיים בו-זמנית.

## משפט חפיפה רביעי

✓ אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש האחר, וגם הזווית שמול הצלע הארוכה מבין

השתיים במשולש האחד שווה לזווית המתאימה לה במשולש האחר, אזי שני המשולשים חופפים.

אם מתקיים:



$$\triangle ABC \cong \triangle KLM \iff \begin{cases} AC = KM \\ BC = LM \\ \angle B = \angle L \\ AC > BC \\ KM > LM \end{cases}$$

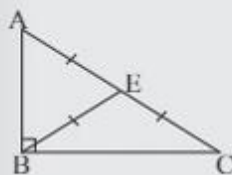
למשפט זה קוראים משפט החפיפה הרביעי או משפט 'צלע, צלע, זווית', ובקיצור: צ.צ.ז.

## משולש ישר-זווית

✓ במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר:  $AE = CE = BE$

✓ אם במשולש קיים תיכון לאחת הצלעות השווה למחצית הצלע שהוא חוצה, אזי

המשולש הוא ישר-זווית.

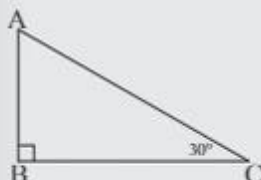


✓ במשולש ישר-זווית, שאחת מזוויותיו בת  $30^\circ$ ,

הניצב שמול זווית זו שווה למחצית היתר:  $AB = \frac{1}{2} AC$

✓ אם במשולש ישר-זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אזי הזווית

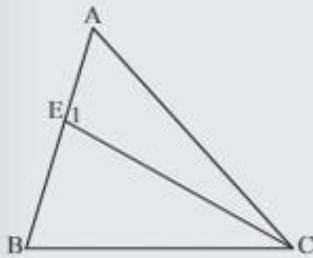
שמול ניצב זה שווה ל- $30^\circ$ .



## דוגמה פתורה

נתון:  $AC > BC$ .

הוכיחו:  $AC > CE$ .



הוכחה:

נתון,

$$AC > BC$$

$\Downarrow$

$$\angle B > \angle A$$

, אם במשולש שתי צלעות שונות באורכן,

אזי מול הצלע הארוכה מביניהן נמצאת הזווית הגדולה.

$$\angle E_1 > \angle B$$

$\Downarrow$

$$\angle E_1 > \angle A$$

$\Downarrow$

$$AC > CE$$

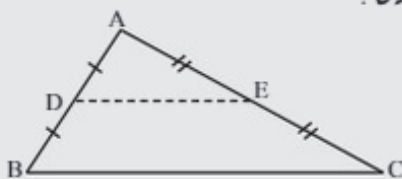
, אם במשולש שתי זוויות שונות בגודלן, אזי מול הזווית הגדולה

מביניהן נמצאת הצלע הארוכה.

מש"ל

## קטע אמצעים במשולש

הגדרה: קטע, המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, נקרא **קטע אמצעים במשולש**:



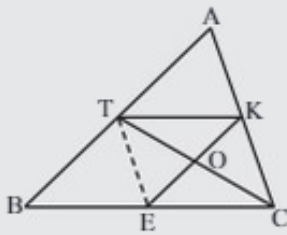
$$AE = EC \text{ ו- } AD = DB$$

$\Downarrow$

DE קטע אמצעים במשולש  $\triangle ABC$ .

| משפטים המאפשרים לזהות קטע אמצעים במשולש                                                                                                                                                                                                                           | משפטים המציגים תכונות של קטע אמצעים במשולש                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <p>✓ קטע, המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, הוא קטע אמצעים במשולש (הגדרה).</p> <p>✓ אם קטע חותך שתי צלעות של המשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה, אזי הוא קטע אמצעים במשולש.</p> <p>✓ קטע, החוצה צלע אחת של המשולש ומקביל לצלע השנייה, חוצה את הצלע השלישית.</p> | <p>✓ קטע, המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.</p> |

## דוגמה פתורה



במשולש  $\triangle ABC$  נתון:

$$KO = OE, TO = OC, AT = TB$$

א. הוכיחו: המרובע TKCE הוא מקבילית.

ב. הוכיחו:  $BE = EC$ .

ג. הוכיחו:  $TE = \frac{1}{2} \cdot AC$ .

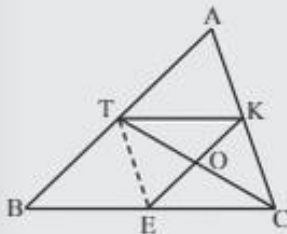
הוכחה:

א.  $TO = OC$ , נתון,

$KO = OE$ , נתון,

$\Downarrow$

TKCE מקבילית, מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.



ב. במקבילית הצלעות הנגדיות מקבילות זו לזו.

נתון,

$TE \parallel AC$

$AT = TB$

$\Downarrow$

$BE = EC$

קטע, החוצה צלע אחת של המשולש ומקביל לצלע השנייה, חוצה את הצלע השלישית.

ג. TE קטע אמצעים במשולש  $\triangle ABC$ , מסעיף ב'.

$\Downarrow$

$TE = \frac{1}{2} \cdot AC$

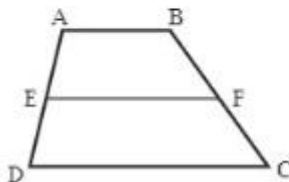
קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

מש"ל

## קטע אמצעים בטרפז

משפט:

קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

המרובע ABCD הוא טרפז,  $(AB \parallel DC)$ .

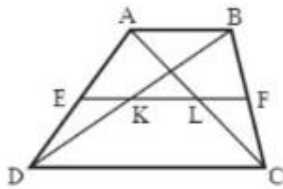
נתון:  $AE = DE$ ,  $BF = CF$ .



$EF = \frac{AB + DC}{2}$

$EF \parallel DC$  או  $EF \parallel AB$

## דוגמא:



הקטע EF הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD ( $AB \parallel DC$ ). האלכסונים חותכים את קטע האמצעים בנקודות K ו-L.  
נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $DC = 14$  ס"מ.  
חשב את הקטעים EK ו-LF.

## פתרון:

נסתכל במשולש ADB. עפ"י הנתון הקטע EK יוצא מאמצע הצלע AD ומקביל לצלע AB. לכן, לפי המשפט שבעמ' 158, הקטע EK הוא קטע אמצעים במשולש ADB. בדיוק באותו אופן הקטע LF הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

$$\text{לכן } EK = \frac{1}{2} AB = \frac{6}{2} = 3 \text{ ס"מ} \quad \text{וכן} \quad LF = \frac{1}{2} AB = \frac{6}{2} = 3 \text{ ס"מ}$$

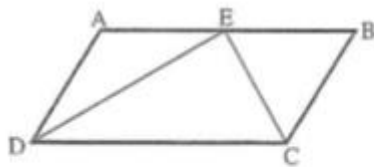
$$\text{הקטע } EF \text{ הוא קטע האמצעים בטרפז ולכן: } EF = \frac{AB+DC}{2} = \frac{14+6}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ ס"מ}$$

$$\text{מכאן נקבל: } KL = EF - (EK + LF) = 10 - (3+3) = 10 - 6 = 4 \text{ ס"מ}$$

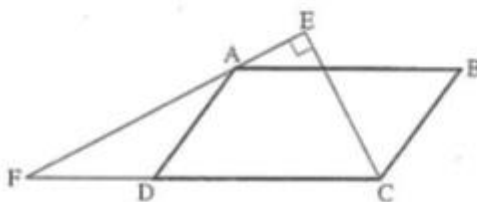
**לסיכום:**  $EF = LF = 3$  ס"מ,  $KL = 4$  ס"מ

## תרגול:

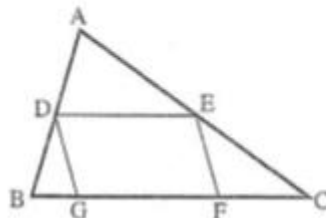
### מקבילית:



- (1) המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטעים EC ו-ED חוצים בהתאמה את הזווית C ו-D ונפגשים בנקודה E שעל הצלע AB.  
הוכח: א.  $\angle DEC = 90^\circ$ . ב.  $AE = BE$ . ג.  $AB = 2BC$ .

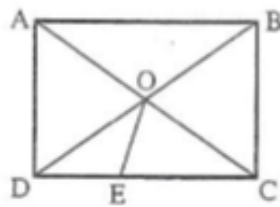


- (2) במקבילית ABCD הנקודה F נמצאת על המשך הצלע DC והנקודה E נמצאת על המשך הקטע AF. נתון:  $FE \perp CE$ ,  $AD = FD$ .  
הוכח: הקטע EC חוצה את זווית BCD.

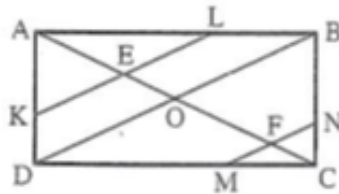


- (3) בתוך משולש ABC חסומה מקבילית DEFG. נתון:  $AC = BC$ ,  $DB = DG = CF$ .  
חשב את זווית המשולש ABC.

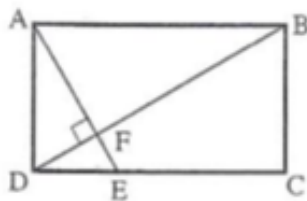
## מלבן:



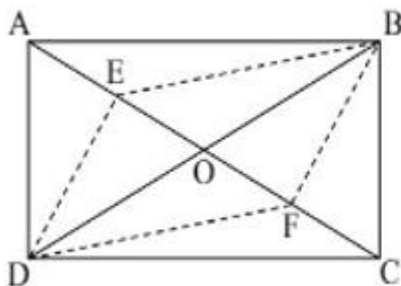
- (1) במלבן ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה O. הנקודה E נמצאת על הצלע DC כך שמתקיים:  $OE = DE$ ,  $CO = CE$ .  
חשב את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן.



- (2) במלבן ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה O. הקטעים KL ו-MN מקבילים לאלכסון BD וחותכים את האלכסון AC בנקודות E ו-F בהתאמה. הוכח: א.  $KE + EF + FN = BD$ . ב.  $KE = EL$ .

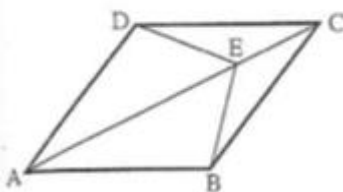


- (3) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע DC כך שמתקיים:  $AE \perp BD$ ,  $AE = CE$ .  
א. חשב את זווית BDC.  
ב. הוכח:  $DF = \frac{1}{4} BD$ .  
(F נקודת החיתוך של AE ו-BD).

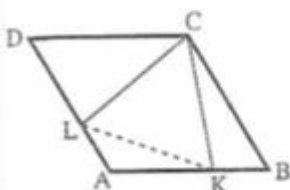


4. אלכסוני המלבן ABCD נחתכים בנקודה O.  
א. הוכיחו:  $\angle CBO = \angle ADO$ .  
ב. הישרים DE ו-BF הם בהתאמה חוצי הזוויות  $\angle CBO$  ו- $\angle ADO$  כמתואר בשרטוט. הוכיחו:  $DE = BF$ .  
ג. הוכיחו: המרובע BEDF הוא מקבילית.

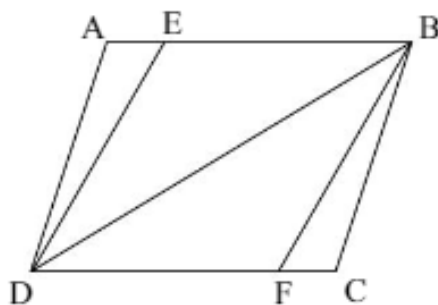
## מעוין



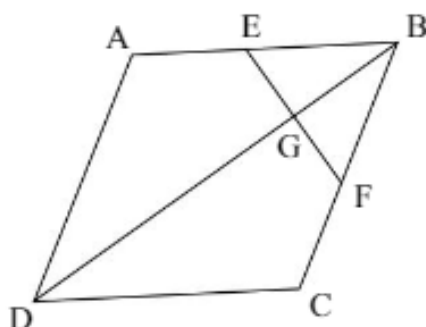
- (1) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על האלכסון AC כך שמתקיים:  $BE = DE$ .  
הוכח: המקבילית ABCD היא מעוין.



- (2) במעוין ABCD זווית B שווה ל- $60^\circ$ . הנקודה L נמצאת על הצלע AD והנקודה K נמצאת על הצלע AB נתון:  $AL = BK$ .  
א. הוכח:  $CL = CK$ .  
(הדרכה: העבר את האלכסון AC).  
ב. הוכח: המשולש CLK הוא שווה צלעות.

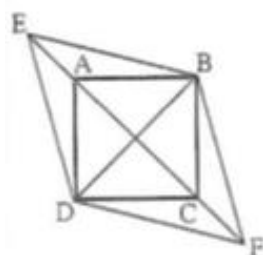


3. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD במקבילית ABCD כמתואר בשרטוט.  
נתון:  $\angle CBF = \angle ADE$ .  
א. הוכיחו:  $\triangle CFB \cong \triangle AED$ .  
ב. נתון: האלכסון BD חוצה את הזווית  $\angle EBF$ .  
הוכיחו: המרובע BEDF הוא מעוין.  
ג. נתון:  $\angle CBF = 20^\circ$ ,  $\angle BCF = 100^\circ$ .  
חשבו את הזווית  $\angle BDE$ .

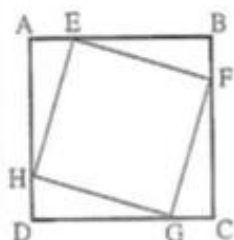


4. במעוין ABCD הנקודות E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-BC בהתאמה.  
הקטע EF חותך את האלכסון BD בנקודה G.  
א. הוכיחו: המשולש BEF הוא שווה שוקיים.  
ב. הסבירו מדוע  $EF \perp BD$ .

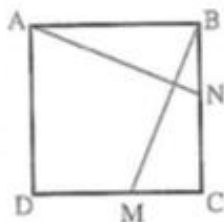
### ריבוע:



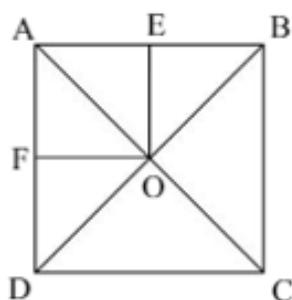
- (1)  
המרובע ABCD הוא ריבוע.  
הנקודות E ו-F נמצאות על המשך האלכסון AC כך שמתקיים:  $AE = CF$ .  
הוכח: המרובע EBFD הוא מעוין.



- (2)  
הנקודות E, F, G ו-H נמצאות על צלעות של ריבוע ABCD. נתון:  $AE = BF = CG = DH$ .  
הוכח: המרובע EFGH הוא ריבוע.



- (3)  
הנקודה N נמצאת על הצלע BC והנקודה M נמצאת על הצלע DC בריבוע ABCD. נתון:  $NC = MD$ .  
הוכח:  $AN \perp BM$ .

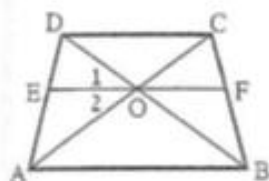


(4)

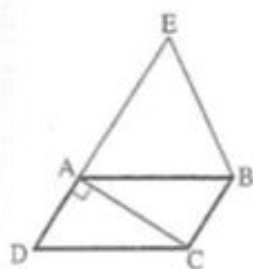
נתון הריבוע ABCD שאלכסוניו נחתכים בנקודה O.  
 הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AD.  
 נתון:  $OE \parallel AD$ ,  $FO \parallel AB$ .  
 א. הוכיחו: המרובע AEOF הוא ריבוע.  
 ב. נתון:  $OF = 4$  ס"מ. חשבו את שטח הריבוע ABCD.

## טרפז

(1)

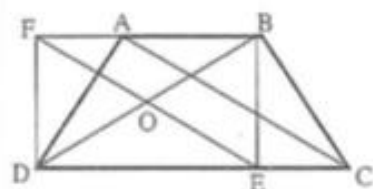


המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel DC$ )  
 שאלכסוניו נחתכים בנקודה O. הקטע EF עובר דרך  
 הנקודה O ומקביל לבסיס AB.  
 הוכח: א.  $\angle O_1 = \angle O_2$ .  
 ב.  $EO = FO$ .



(2)

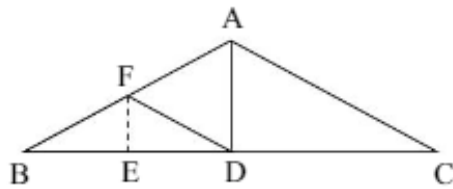
המרובע ABCD הוא מקבילית שבה האלכסון  
 AC מאונך לצלע AD. הנקודה E נמצאת על  
 המשך הצלע AD כך שמתקיים  $AE = 2AD$ .  
 א. הוכח: המרובע EBCD הוא טרפז שווה שוקיים.  
 ב. סמן ב-F את האמצע של DC.  
 הוכח: (1)  $AF = \frac{1}{2} BE$  (2)  $AF \parallel BE$ .



(3)

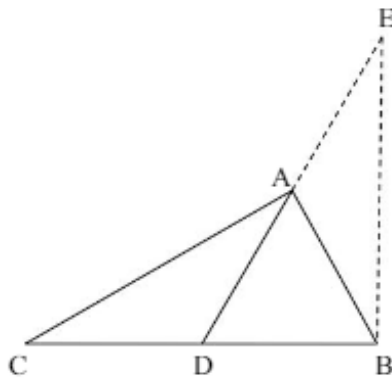
המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel DC$ ).  
 הנקודה E נמצאת על DC והנקודה F נמצאת  
 על המשך AB כך שהקטע EF מקביל לאלכסון  
 AC וחוצה את האלכסון BD בנקודה O.  
 הוכח: המרובע DFBE הוא מלבן.

(1)



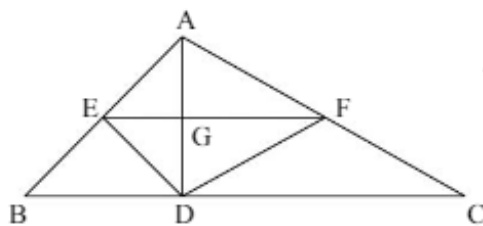
- במשולש שווה השוקיים  $\triangle ABC$  הישר  $AD$  הוא הגובה לבסיס.  
 הנקודה  $F$  היא אמצע השוק  $AB$ . נתון:  $AC = 20$  ס"מ.  
 א. חשבו את אורך הקטע  $AF$ .  
 ב. נתון:  $\angle ACD = 30^\circ$ . חשבו את היקף המשולש  $ADF$ .  
 ג. הנקודה  $E$  נמצאת על הקטע  $BD$ . נתון:  $BD \perp EF$ . חשבו את אורך הקטע  $EF$ .

(2)



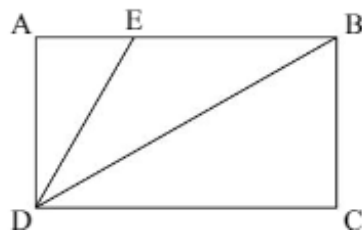
- הנקודה  $D$  נמצאת על הצלע  $BC$  במשולש  $\triangle ABC$ .  
 הצלעות  $AB$  ו- $AC$  הן בהתאמה הבסיסים במשולשים  
 שווים השוקיים  $\triangle ABD$  ו- $\triangle ACD$ .  
 א. הוכיחו:  $\angle BAC = 90^\circ$ .  
 ב. הנקודה  $E$  נמצאת על המשך הקטע  $AD$  כמתואר בשרטוט.  
 נתון:  $AE = AD$ ,  $BD \perp BE$ .  
 הסבירו מדוע מתקיים:  $AB = BD$ .  
 ג. חשבו את הזווית  $\angle ABD$ .  
 ד. הוכיחו:  $AC = BE$ .

(3)



- הקטע  $AD$  הוא גובה במשולש  $\triangle ABC$ .  
 הנקודות  $E$  ו- $F$  הן בהתאמה אמצעי הצלעות  $AB$  ו- $AC$ .  
 א. הוכיחו: המרובע  $AEDF$  הוא דלתון.  
 ב. סמנו את הנקודות  $M$  ו- $N$  כאמצעי הקטעים  
 $DF$  ו- $AF$  בהתאמה.  
 הוכיחו: המרובע  $GMFN$  הוא מעוין.

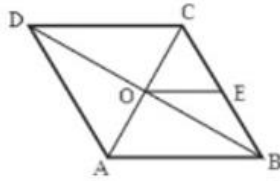
(4)



- הנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AB$  במלבן  $ABCD$ . הישרים  
 $DE$  ו- $BD$  מחלקים את הזווית  $\angle ADC$  לשלוש זוויות שוות.  
 א. הוכיחו:  $BE = 2AE$ .  
 ב. הוכיחו שמתקיים יחס השטחים:  $S_{ABCD} = 6 \cdot S_{ADE}$ .

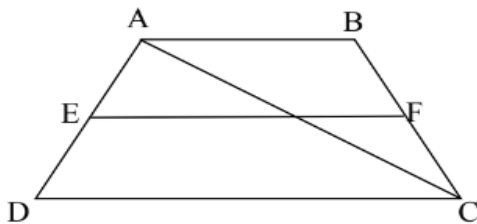
קטע אמצעים במשולש ובטרפז

(1)



- המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסוניו נחתכים בנקודה O. הנקודה E נמצאת על הצלע BC כך שהמרובע OEBA הוא טרפז שווה שוקיים.
- א. הסבר מדוע OE ו-AB הם הבסיסים של הטרפז.
- ב. הוכח:  $BE = CE$  וחשב את זווית המעוין.
- ג. נתון שהיקף המעוין הוא 32 ס"מ. חשב את היקף הטרפז.

(2)



- בטרפז שווה שוקיים ABCD ( $AB \parallel CD$ )
- EF קטע אמצעים.
- $EF = 25$  ס"מ
- היקף משולש ACD גדול ב- 8 ס"מ מהיקף משולש ABC.
- חשבו את אורכי הבסיסים של הטרפז. נמקו.