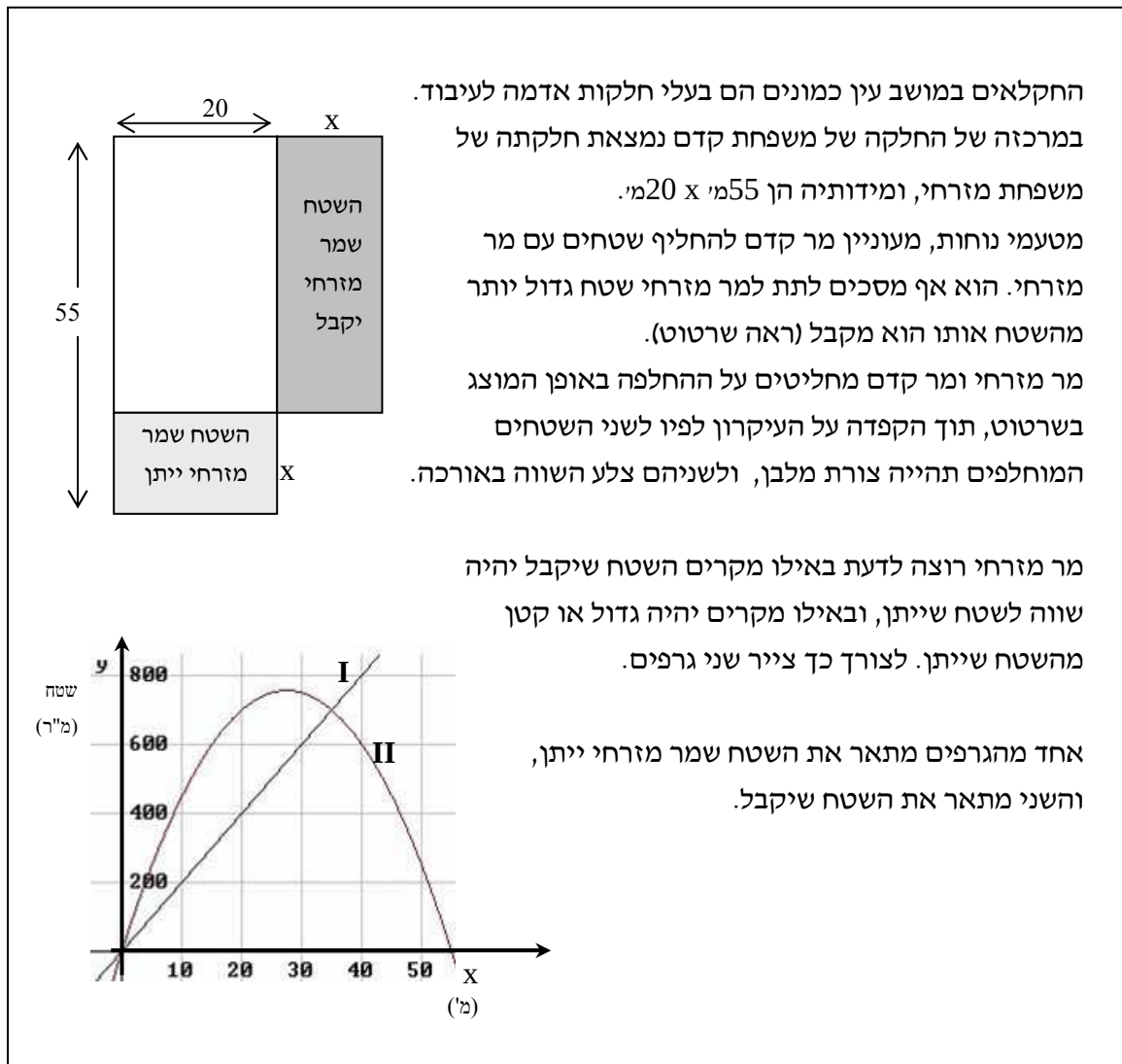


חלקת אדמה



- שאלה 1. איזה משני הגרפים מתאר את השטח שמר מזרחי ייתן, ואיזה - את השטח שיקבל?
- שאלה 2. מסביב לחלקה של מר מזרחי יש גדר, שעלות התקנתה גבוהה. אמר מר מזרחי: "אני שמח על כך שאינני צריך לשנות את אורך הגדר." האם הוא צודק? הסבירו.
- שאלה 3. איזה שטח ייתן מר מזרחי, אם x יהיה 10 מ'? האם מר מזרחי משיג במקרה זה שטח גדול יותר או קטן יותר, ביחס לשטח שהיה לו קודם? הראו כיצד פתרתם.
- שאלה 4. אם מר מזרחי ייתן 20% משטח החלקה שלו, מהו אחוז השטח אותו יקבל מתוך שטח החלקה כולה?

שאלה 5. אילו מהביטויים הבאים מתארים את השטח שיישאר למר מזרחי לאחר החלפת השטחים?

א. $20(55 - x)$ ב. $20 \cdot 55 - 20x + x(55 - x)$

ג. $(20 + x)(55 - x)$ ד. $x(55 - x)$

שאלה 6. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששטח החלקה יישאר כפי שהיה לפני ההחלפה?

שאלה 7. א. האם תוכלו למצוא מספר עבור x , שהצבתו תביא לכך ששטח החלקה שיישאר

למר מזרחי אחרי ההחלפה יהיה 1250 מ"ר?

אם לא – הסבירו מדוע. אם כן – מצאו והסבירו כיצד מצאתם.

ב. האם תוכלו למצוא מספר עבור x , שהצבתו תביא לכך ששטח החלקה שיישאר לו

אחרי ההחלפה יהיה 1600 מ"ר?

אם לא – הסבירו מדוע. אם כן – מצאו והסבירו כיצד מצאתם.

שאלה 8. מה צריך להיות ערכו של x כדי שהשטח של מר מזרחי לאחר ההחלפה יהיה הגדול ביותר?

הסבירו כיצד מצאתם.

שאלה 9. אילו ערכים אינם אפשריים כתוספת לשטח?

פתרון למשימה: חלקת אדמה

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים: מילולי, אלגברי, גרפי וחזותי;
- קריאת גרפים;
- אחוזים – אורכים ושטחים;
- מציאת שטחים שונים למלבנים בעלי היקף קבוע;
- פונקציה ריבועית;
- פתרון משוואה ריבועית;
- מציאת תחום לקיום פתרון למשוואה ריבועית;
- מציאת מקסימום של פונקציה ריבועית.

שאלה 1. איזה משני הגרפים מתאר את השטח שמר מזרחי ייתן, ואיזה - את השטח שיקבל?

גרף I הוא הגרף המתאר את השטח שמר מזרחי ייתן, כי הפונקציה המתארת אותו היא

$$y = 20x, \text{ וזוהי פונקציה קווית.}$$

גרף II הוא הגרף של השטח שמר מזרחי יקבל, כי הפונקציה המתארת אותו היא

$$y = x(55 - x), \text{ וזוהי פונקציה ריבועית.}$$

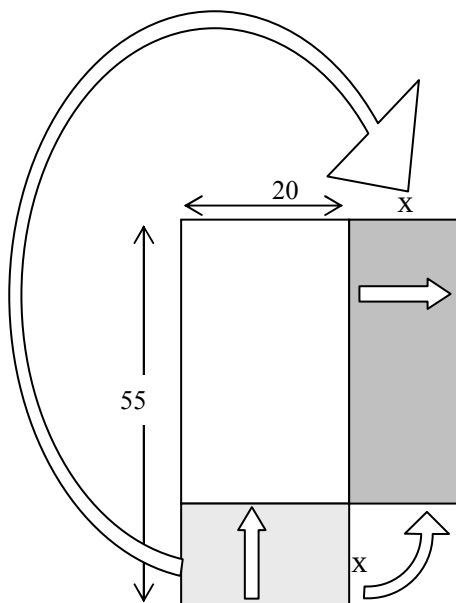
שאלה 2. מסביב לחלקה של מר מזרחי יש גדר, שעלות התקנתה גבוהה.

אמר מר מזרחי: "אני שמח על כך שאינני צריך לשנות את אורך הגדר."

האם הוא צודק? הסבירו.

מר מזרחי צודק. לכל חלק של גדר החלקה שייתן יש חלק תואם באורכו בהיקף החלקה

שיקבל, כפי שמתואר בשרטוט.



אפשר גם לחשב :

$$2(20 + 55) = 150 \quad \text{אורך הגדר המקורית: 150 מ'}$$

$$2(55 - x) + 2(20 + x) = 150 \quad \text{אורך הגדר החדשה: 150 מ'}$$

שאלה 3. איזה שטח ייתן מר מזרחי, אם x יהיה 10 מ'?

האם מר מזרחי משיג במקרה זה שטח גדול יותר או קטן יותר, ביחס לשטח שהיה לו קודם? הראו כיצד פתרתם.

מתוך התבוננות בגרף ניתן לראות כי במקרה ש $x = 10$, ייתן מר מזרחי 200 מ"ר ויקבל יותר מ-400 מ"ר.

אפשר להציב בתבניות, ולחשב בדיוק את השטחים: מר מזרחי ייתן $20 \cdot 10 = 200$ מ"ר ויקבל $10 \cdot 45 = 450$ מ"ר. כלומר, במקרה זה הוא יקבל שטח גדול יותר.

שאלה 4. אם מר מזרחי ייתן 20% משטח החלקה שלו, מהו אחוז השטח אותו יקבל מתוך שטח החלקה כולה?

השטח שמר מזרחי יקבל ישתווה ל- 44% משטח החלקה שלו כיום.

שטח החלקה של מר מזרחי כיום הוא 1100 מ"ר.

$$20\% \text{ משטח זה שווה לשטח של } 220 \text{ מ"ר. } 1100 \cdot 0.2 = 220$$

$$20x = 220 \quad \text{נמצא מהו } x \text{ במקרה זה:}$$

$$x = 11$$

אפשר למצוא את x גם בעזרת שיקולים:

מכיוון שהרוחב של החלק הנמסר קבוע, השטח הנמסר פרופורציוני לאורך הנמסר, כלומר

ל- x . לכן x צריך להיות 20% מ-55, כלומר: 11 מ'.

$$\text{נחשב את השטח שמר מזרחי יקבל: } 11(55 - 11) = 484$$

מר מזרחי יקבל 484 מ"ר.

$$\frac{1100 \cdot p}{100} = 484 \quad \text{נחשב איזה אחוז מהווה שטח זה משטח החלקה:}$$

$$p = 44$$

השטח שמר מזרחי יקבל יהווה 44% משטח החלקה שלו כיום.

שאלה 5. אילו מהביטויים הבאים מתארים את השטח שיישאר למר מזרחי לאחר החלפת השטחים?

א. $20(55 - x)$ ב. $20 \cdot 55 - 20x + x(55 - x)$

ג. $(20 + x)(55 - x)$ ד. $x(55 - x)$

התשובות הנכונות הן ב' ו- ג'.

הביטוי בסעיף ב' הוא ייצוג של השטח המקורי, בהפחתת השטח שמר מזרחי ייתן ובתוספת השטח שהוא יקבל.

הביטוי בסעיף ג' הוא ייצוג של השטח החדש כמלבן.

יש לשים לב שהביטויים ב' ו- ג' שקולים זה לזה.

שאלה 6. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששטח החלקה יישאר כפי שהיה לפני ההחלפה?

אפשר להתבונן בגרף, להיווכח שנקודת החיתוך היא בערך עבור $x = 35$, ולבדוק שאכן:

$$20 \cdot 35 = 35(55 - 35)$$

אפשר לפתור משוואות שונות המתורגמות מן המשפטים הבאים, או ממשפטים הדומים להם, ולמצוא כי פתרון הוא $x = 35$:

$$20x = x \cdot (55 - x) \quad \text{השטח שמר מזרחי יקבל} = \text{השטח שמר מזרחי ייתן}$$

$$(20 + x) \cdot (55 - x) = 55 \cdot 20 \quad \text{שטח החלקה לפני החלפה} = \text{שטח החלקה לאחר החלפה}$$

בכל השיטות (גרף או משוואה) מתקבל פתרון נוסף: אפס. יש להדגיש בפני התלמידים שפתרון זה איננו מתאים, כי משמעותו היא כי לא הוחלפו שטחים.

שאלה 7. א. האם תוכלו למצוא מספר עבור x , כך שהצבתו תביא לכך ששטח החלקה שיישאר

למר מזרחי אחרי ההחלפה יהיה 1250 מ"ר?

אם לא – הסבירו מדוע. אם כן – מצאו והסבירו כיצד מצאתם.

הביטוי לשטח של מר מזרחי לאחר החלפת השטחים, לפי שאלה 5, הוא:

$$(20 + x)(55 - x)$$

$$\text{המשוואה המתאימה: } (20 + x)(55 - x) = 1250$$

למשוואה שני פתרונות: $x_1 = 30$ ו- $x_2 = 5$ ושניהם מתאימים.

מידות החלקה בשני המקרים הן: 50×25 או: 25×50 , כלומר: מתקבלים שני מלבנים חופפים.

הגרף המתאר את השטח של מר מזרחי לאחר החלפת השטחים הוא פרבולה ברביע

הראשון. קודקוד הפרבולה

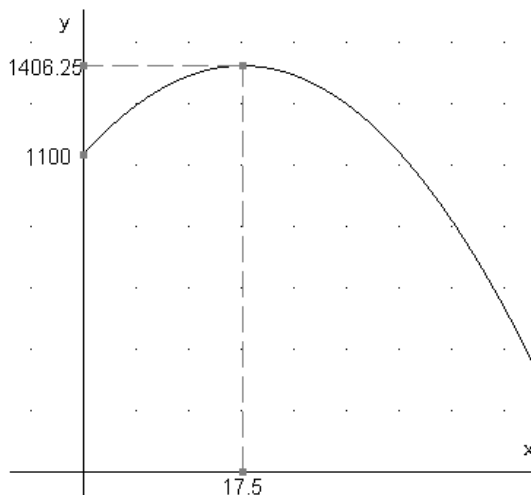
נמצא ב- $(17.5, 1406.25)$, ולכן -

עבור שטח של 1250 - מתקבלות

שתי תשובות לאחת מצלעות

המלבן, ושתייהן סימטריות ביחס

ל- $x = 17.5$.



ב. האם תוכלו למצוא מספר עבור x , כך שהצבתו תביא לכך ששטח החלקה שיישאר לו

אחרי ההחלפה יהיה 1600 מ"ר?

אם לא – הסבירו מדוע. אם כן – מצאו והסבירו כיצד מצאתם.

להלן שלוש גישות לפתרון:

i. המשוואה המתאימה: $(20 + x)(55 - x) = 1600$

למשוואה זו אין פתרונות. ולכן אין x כזה.

ii. אפשר לראות בגרף שלמעלה כי התוצאה הגבוהה ביותר עבור השטח היא

1406.25 מ"ר.

iii. אפשר לגשת לפתרון השאלה מכיוון אחר: השטח שיש למר מזרחי עכשיו הוא

1100 מ"ר. כדי שאחרי ההחלפה יהיו לו 1600 מ"ר יש להוסיף לו שטח של 500

מ"ר. אפשר לראות בגרפים שבמסגרת השאלה שהפרש כזה לא ייתכן.

שאלה 8. מה צריך להיות ערכו של x כדי שהשטח של מר מזרחי לאחר ההחלפה יהיה הגדול

ביותר?

הסבירו כיצד מצאתם.

התוספת לשטח של מר מזרחי היא ההפרש בין השטח שמר מזרחי יקבל לבין השטח שייתן.

הפונקציה עבור ההפרש הזה היא: $y = (55 - x)x - 20x$

ואחרי פישוט: $y = -x^2 + 35x$

הגרף של פונקציה זו יתקבל מהזזה כלפי מטה של הגרף שבעמוד הקודם ב- 1100 מ"ר

(השטח המקורי).

את התוספת המקסימלית נקבל אם נמצא את נקודת המקסימום של הפונקציה הזו.

אפשר להשתמש בנוסחה עבור מציאת הקודקוד: $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-35}{-2} = 17.5$$

עבור $x = 17.5$ התוספת תהיה מקסימלית.

ערכה במקרה זה: $306.25 \text{ מ"ר} = -17.5^2 + 35 \cdot 17.5$

השטח - במקרה זה - הוא שטח של ריבוע, ואמנם, מבין כל המלבנים בעלי אותו היקף,

שטח הריבוע הוא הגדול מכולם.

שאלה 9. אילו ערכים אינם אפשריים כתוספת לשטח?

בתשובה לשאלה הקודמת ראינו שעבור $x = 17.5$ תוספת השטח תהיה מקסימלית.

ערכה במקרה זה: $306.25 \text{ מ"ר} = -17.5^2 + 35 \cdot 17.5$

לכן, הערכים שאינם אפשריים כתוספת לשטח הם הערכים הגדולים מ- 306.25, או

הקטנים מ- 0.